В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко

Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад.
Геометрія

Вінниця
2014

УДК 514.112
ББК 22.151.0
Я81

Рецензенти:

Працьовитий М. В. — доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова

Матяш О. І. — доктор педагогічних наук, доцент кафедри математики і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Я81 Ясінський В. А. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Геометрія / В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко. — Вінниця : ФОП Легкун В.М., 2014. — 225 с.

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (протокол №3 від 23.10.2014 р.)

В посібнику описано деякі методи розв’язування геометричних задач олімпіадного характеру та наведено добірку задач республіканських і Міжнародних математичних олімпіад, що проводились у 2012 та 2013 роках. Усі запропоновані задачі супроводжуються повним розв’язанням. Посібник призначений для вчителів математики, учнів загальноосвітніх шкіл, студентів педагогічних університетів, які навчаються за спеціальністю «Математика», та всіх, хто цікавиться елементарною геометрією.

Зміст

Передмова

Олімпіадна математика з року в рік активно розвивається. З'являються нові тенденції, змінюються деякі традиції. Аналіз результатів математичних олімпіад України свідчить про потребу у вдосконаленні методів навчання розв'язувати геометричні задачі високого рівня складності.

Автори цього навчально-методичного посібника ставили перед собою за мету розкрити кращі сучасні прийоми розв'язування олімпіадних задач. Вперше у вітчизняній методичній літературі досліджено специфіку методів розв'язування та рівень складності задач, пропонованих різними країнами на національних олімпіадах.

Посібник складається з двох частин. У першій частині допитливий читач знайде нові красиві використання опорних задач-фактів і задач-методів олімпіадної геометрії, теоретичні новинки до розв'язування планіметричних задач на обчислення, а також сучасні доведення класичних теорем планіметрії та їх використання. У другій частині наведено з повними розв'язаннями 70 олімпіадних задач, які у 2012 та 2013 роках пропонувалися учням на математичних олімпіадах найвищого рівня.

Посібник безперечно буде корисним творчо працюючим вчителям математики, обдарованим учням загальноосвітніх шкіл та ліцеїв, студентам педагогічних університетів, які навчаються за спеціальністю «Математика», та всім тим, хто цікавиться вічно молодою *геометрією*.

Успіх на захоплюючому та тернистому шляху вивчення улюбленої науки супроводжує тих, хто не дозволяє задачам звалюватися на голову зненацька! ☺

Вересень 2014 року

В'ячеслав Ясінський
Олексій Панасенко

Розв'язання задач 2013 року

Задача 6.1. *Нехай кола k_1 і k_2 перетинаються в двох точках A і B. Пряма t — спільна дотична цих кіл, M і N — точки її дотику з k_1 і k_2 відповідно. Нехай прямі MA і MN перпендикулярні і $MN = 2MA$. Знайдіть величину кута BMN.*

(Міжнародна математична олімпіада країн Балканського регіону, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 6.1).

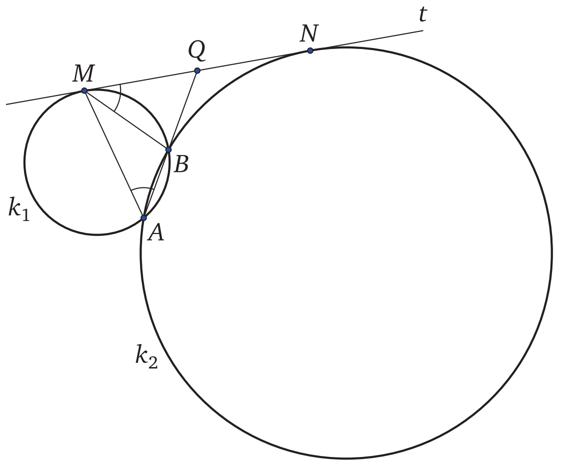

Рис. 6.1.

Оскільки $AM \perp MN$, то AM — діаметр кола k_1. Нехай Q — точка перетину прямих AB і MN, тоді Q — середина MN. Це випливає з того, що AB — радикальна вісь кіл k_1 і k_2, а тому степінь точки Q відносно цих кіл однаковий, тобто $QM = QN$ (QM і QN — дотичні до k_1 і k_2). Тому, $MA = MQ$ (бо за умовою задачі $MN = 2MA$), тобто трикутник AMQ прямокутний і рівнобедрений. Звідси слідує, що $\angle MAQ = 45^\circ$, а тому й $\angle BMN = \angle AMB = 45^\circ$ (як кут між дотичною і хордою, що проведена в точку дотику). Це і завершує розв'язання задачі.

□

Задача 6.2. *Два кола k_1 і k_2 перетинаються в точках A і B. Нехай точки C і D розташовані на колах k_1 і k_2 відповідно так, що A — середина відрізка CD. Продовження відрізка CB перетинає коло k_2 у точці F, а продовження відрізка DB перетинає коло k_1 у точці E. Нехай l_1 і l_2 — серединні перпендикуляри відрізків CD і EF відповідно, а P — точка їх перетину. Доведіть, що із відрізків CA, AP і PE можна скласти прямокутний трикутник.*

(Китай, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 6.2).

Оскільки $\angle CAE = \angle ADE + \angle AED = \angle AFC + \angle ACF = \angle FAD$ і $l_1 \perp CD$, то l_1 містить бісектрису $\angle EAF$. Нехай k — описане коло трикутника AEF, а X — друга точка перетину l_1 і k. Оскільки AX — бісектриса $\angle EAF$, то за властивостями вписаних кутів рівними будуть дуги EX і XF кола k. Звідси випливає рівність хорд, що їх стягують, тобто $XE = XF$. А це означає, що $X \in l_2$. Оскільки $X \in l_1$, то $X = P$.

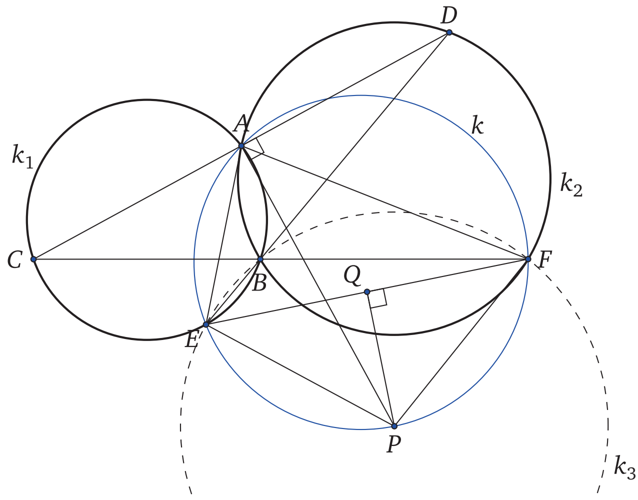

Рис. 6.2.

Оскільки

$$\angle EBF = \angle AEB + \angle AFB + \angle EAF = \angle BCD + \angle BDC + \angle EAF$$

і

$$\angle EBF = 180^\circ - \angle BCD - \angle BDC,$$

то, додавши ці рівності, одержимо:

$$2\angle EBF = 180^\circ - \angle EAF = 360^\circ - \angle EPF,$$

тобто, після скорочення на 2, матимемо:

$$\angle EBF = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle EPF.$$

Ця рівність означає, що точка P — центр описаного кола k_3 навколо трикутника EBF. Оскільки, з одного боку, $DP^2 - PE^2$ — це степінь точки D відносно кола k_3, а з іншого $DE \cdot DB$ це також степінь точки D відносно кола k_3, то $DP^2 - PE^2 = DE \cdot DB$. Далі, за теоремою про січні кола, маємо: $DE \cdot DB = DC \cdot DA$. Тому, $DP^2 - PE^2 = DC \cdot DA = 2AC^2$. Крім того, з перпендикулярності AP і CD випливає: $DP^2 = AD^2 + AP^2 = AC^2 + AP^2$. З двох останніх рівностей одержуємо:

$$AC^2 + AP^2 - PE^2 = 2AC^2,$$

тобто $AP^2 = PE^2 + AC^2$. Ця рівність означає те, що потрібно було довести. □

Задача 6.3. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, k — його описане коло. На дузі BC цього кола, яка не містить точку A, довільно зафіксували точку D. Рухома пряма l, що проходить через точку H — ортоцентр трикутника ABC, перетинає вдруге описані кола навколо трикутників ABH і ACH відповідно в точках M і N.*

а) Знайти усі такі положення прямої l, для яких площа трикутника AMN досягає найбільшого можливого значення.

б) Нехай p_M і p_N — прямі, що проходять через точки M і N перпендикулярно до DB і DC відповідно, а P — їх точка перетину. Доведіть, що точка P рухається по фіксованому колу.

(В'єтнам, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 6.3).

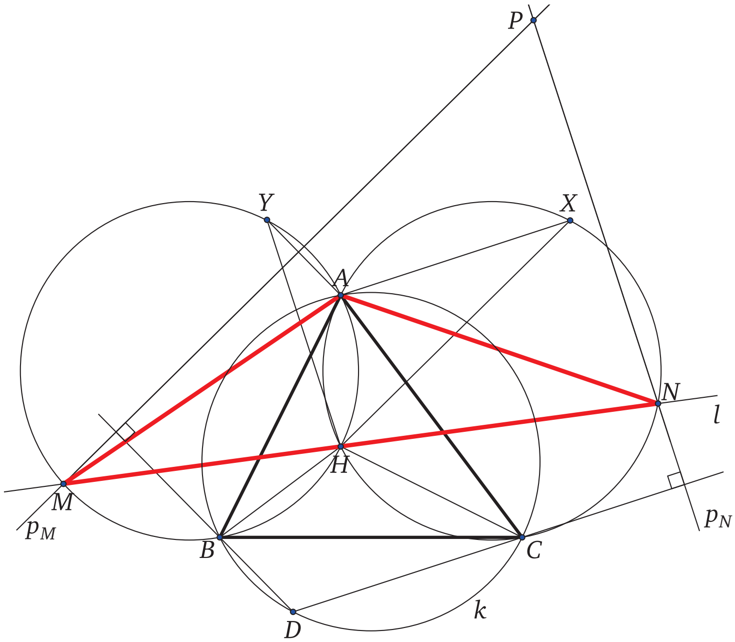

Рис. 6.3.

а) Використовуючи властивості вписаних кутів, одержуємо:

$$\angle ANM = \angle ANH = \angle ACH = 90^\circ - \angle A = \angle ABH = \angle AMN,$$

тобто трикутник AMN — рівнобедрений з фіксованим кутом

$$\angle MAN = 2\angle A.$$

Таким чином,

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \cdot \sin 2\angle A.$$

Оскільки $AM = AN$ і ці відрізки є хордами описаних кіл, трикутників ABH і ACH, то їх найбільше значення буде дорівнювати діаметрам цих кіл, які дорівнюють діаметру описаного кола трикутника ABC. Тому, S_{AMN} досягатиме свого найбільшого значення $2R^2 \sin 2\angle A$, де R — радіус описаного кола трикутника ABC, якщо пряма l буде займати таке положення, при якому AM і AN будуть діаметрами описаних кіл трикутників ABH і ACH відповідно. Це можливо, бо тоді $\angle AHM = 90^\circ - \angle AHN$. Для усіх інших положень прямої l площа трикутника AMN буде досягати меншого значення, ніж $2R^2 \sin 2\angle A$.

Покажчик