В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко

Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад.

Алгебра

Навчально-методичний посібник

Вінниця
ТОВ «Нілан-ЛТД»
2015

Зміст

Передмова

Олімпіадна математика з року в рік активно розвивається. З'являються нові тенденції, змінюються деякі традиції. Аналіз результатів математичних олімпіад України свідчить про об'єктивну потребу в удосконаленні методів навчання розв'язувати задачі високого рівня складності, зокрема й алгебраїчного характеру.

Автори цього навчально-методичного посібника ставили перед собою за мету розкрити кращі сучасні прийоми розв'язування олімпіадних задач. Саме цей посібник присвячено методам розв'язування алгебраїчних задач математичних олімпіад.

Посібник складається з шести розділів. Назви розділів відображають їх зміст:

- деякі корисні рівності і тотожності, які використовуються при розв'язуванні олімпіадних задач;
- деякі новітні технології доведення нерівностей;
- многочлени на математичних олімпіадах;
- числові послідовності на математичних олімпіадах;
- функціональні рівняння на математичних олімпіадах;
- практикум із розв'язування задач з алгебри, що пропонувалися на національних олімпіадах зарубіжних країн.

Посібник безперечно буде корисним творчо працюючим вчителям математики, обдарованим учням загальноосвітніх шкіл та ліцеїв, студентам педагогічних університетів, які навчаються за спеціальністю «Математика», та всім тим, хто цікавиться *математикою*.

Нагадуємо, що успіх на захоплюючому та тернистому шляху вивчення улюбленої науки супроводжує тих, хто не дозволяє задачам звалюватися на голову зненацька! ☺

Вересень 2015 року

В'ячеслав Ясінський
Олексій Панасенко

Розв'язання. Позначимо ліву частину нерівності, що доводиться, через S. Тоді, використовуючи двічі нерівність (2.4) для наборів з трьох чисел, знаходимо

$$S = \frac{(a^2)^2}{a^3+a^2b+ab^2} + \frac{(b^2)^2}{b^3+b^2c+bc^2} + \frac{(c^2)^2}{c^3+c^2a+ca^2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} = \frac{1}{a+b+c}\cdot\left(\frac{a^2}{1}+\frac{b^2}{1}+\frac{c^2}{1}\right) \geqslant$$
$$\frac{1}{a+b+c}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{1+1+1} = \frac{a+b+c}{3},$$

що і потрібно було довести. Зауважимо, що інший спосіб доведення цієї нерівності наведено на сторінці 38 (задача 2.21). □

Задача 2.16. *Нехай* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *— додатні дійсні числа,* $n \geqslant 2$*, такі, що* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$*. Доведіть, що*

$$\frac{x_1}{1+x_2+\ldots+x_n} + \frac{x_2}{1+x_1+\ldots+x_n} + \ldots + \frac{x_n}{1+x_1+\ldots+x_{n-1}} \geqslant \frac{n}{2n-1}.$$

(Балканська математична олімпіада, 1984)

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у вигляді

$$\frac{x_1}{2-x_1} + \frac{x_2}{2-x_2} + \ldots + \frac{x_n}{2-x_n} \geqslant \frac{n}{2n-1}.$$

Оскільки

$$\frac{t}{2-t} = -1 + \frac{2}{2-t},$$

то остання нерівність рівносильна таким нерівностям:

$$(-1) + \frac{2}{2-x_1} + (-1) + \frac{2}{2-x_2} + \ldots + (-1) + \frac{2}{2-x_n} \geqslant \frac{n}{2n-1};$$
$$\frac{2}{2-x_1} + \frac{2}{2-x_2} + \ldots + \frac{2}{2-x_n} \geqslant \frac{n}{2n-1} + n;$$
$$\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} + \ldots + \frac{1}{2-x_n} \geqslant \frac{n^2}{2n-1}.$$

За умовою задачі знаменники усіх дробів в лівій частині останньої нерівності додатні, а тому істинність останньої нерівності випливає з нерівності (2.4):

$$\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} + \ldots + \frac{1}{2-x_n} \geqslant \frac{(1+1+\ldots+1)^2}{2n-(x_1+x_2+\ldots+x_n)} = \frac{n^2}{2n-1}.$$

Зазначимо, що інший спосіб розв'язання цієї задачі буде розглянуто в розділі 2.5 (задача 2.47 на сторінці 75). □

Розв'язання. Оскільки $x+y+z=1$, то наша нерівність еквівалентна такій нерівності

$$0 \leqslant (xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz \leqslant \frac{7}{27}(x+y+z)^3$$

(ми «вирівняли» степінь усіх членів нерівності, тобто зробили її рівною три). Доведемо цю нерівність для будь-яких невід'ємних дійсних чисел.

Для цього розглянемо два однорідних симетричних кубічних многочлени:

$$P(u,v,w)=(uv+vw+wu)(u+v+w)-2uvw$$

та

$$Q(u,v,w)=\frac{7}{27}(u+v+w)^3-(uv+vw+wu)(u+v+w)+2uvw.$$

Оскільки всі значення $P(1,1,1)=7$, $P(1,1,0)=2$, $P(1,0,0)=0$ та $Q(1,1,1)=0$, $Q(1,1,0)=\frac{2}{27}$, $Q(1,0,0)=\frac{7}{27}$ — невід'ємні, то за теоремою про симетричну кубічну нерівність одержуємо, що $P(x,y,z)\geqslant 0$ і $Q(x,y,z)\geqslant 0$ при всіх $x,y,z\geqslant 0$. Звідси при $x+y+z=1$, одержуємо справедливість твердження задачі.

Інші способи розв'язання цієї задачі наведено на сторінках 57 і 81. □

Задача 2.44. *Нехай x, y, z — невід'ємні дійсні числа такі, що $x+y+z=1$. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$x^3+y^3+z^3+6xyz\geqslant\frac{1}{4}.$$

(США, 1979 р.)

Розв'язання. Оскільки $x+y+z=1$, то наша нерівність, еквівалентна такій нерівності

$$x^3+y^3+z^3+6xyz\geqslant\frac{1}{4}(x+y+z)^3$$

(ми «вирівняли» степінь усіх членів нерівності, тобто зробили її рівною три). Доведемо цю нерівність для будь-яких невід'ємних дійсних чисел.

Для цього розглянемо однорідний симетричний кубічний многочлен:

$$P(u,v,w)=u^3+v^3+w^3+6uvw-\frac{1}{4}(u+v+w)^3.$$

Оскільки всі значення $P(1,1,1)=\frac{9}{4}$, $P(1,1,0)=0$ і $P(1,0,0)=\frac{3}{4}$ — невід'ємні, то за теоремою про симетричну кубічну нерівність одержуємо, що $P(x,y,z)\geqslant 0$ при всіх $x,y,z\geqslant 0$. Звідси, при $x+y+z=1$, одержуємо справедливість твердження задачі. □

рівносильне рівнянню

$$\left(x^2 - x_1 x + a\right)\left(x^2 - x_2 x + a^2\right) = 0,$$

де x_1 *і* x_2 *— корені рівняння* $x^2 - x + 6a = 0$.

б) Знайдіть усі дійсні значення числа a*, для кожного із яких рівняння* $x^4 - x^3 + 8ax^2 - ax + a^2 = 0$ *матиме чотири різних дійсних додатні корені.*

(Болгарія, 2004 р.)

Розв'язання. а) Оскільки x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - x + 6a = 0$, то за формулами Вієта: $x_1 + x_2 = 1$ і $x_1 x_2 = 6a$. Тому, після розкриття дужок і зведення подібних доданків, одержуємо:

$$\begin{aligned}\left(x^2 - x_1 x + a\right)\left(x^2 - x_2 x + a^2\right) &= \\ = x^4 - (x_1 + x_2)\,x^3 + (2a + x_1 x_2)\,x^2 - a\,(x_1 + x_2)\,x + a^2 &= \\ = x^4 - x^3 + 8ax^2 - ax + a^2&,\end{aligned}$$

що і завершує доведення.

б) Усі корені рівняння $x^4 - x^3 + 8ax^2 - ax + a^2 = 0$, це корені t_1, t_2 і t_3, t_4 рівнянь $x^2 - x_1 x + a = 0$ і $x^2 - x_2 x + a = 0$ відповідно. Легко бачити, що t_1, t_2, t_3, і t_4 дійсні, різні і додатні, коли саме наступні умови виконуються одночасно:

1) $a > 0$ і $x_1 \neq x_2$ — дійсні, тобто $a > 0$ і $D = 1 - 24a > 0$. Звідки $a > 0$ і $a < \frac{1}{24}$;

2) $D_1 = x_1^2 - 4a > 0$ і $D_2 = x_2^2 - 4a > 0$, тобто $x_1 > 10a > 0$ і $x_2 > 10a > 0$;

3) $t_1 + t_2 = x_1 > 0$, $t_1 t_2 = a > 0$, $t_3 + t_4 = x_2 > 0$ і $t_3 t_4 = a > 0$, тобто $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ і $a > 0$.

Ці умови дають, що $0 < a < \frac{1}{24}$, $x_1 > 10a > 0$ і $x_2 > 10a > 0$, причому $g\,(10a) > 0$ і $25a > 1$, де $g\,(x) = x^2 - x + 6a$. Звідси $\frac{1}{25} < a < \frac{1}{24}$.

Відповідь. б) $\left(\frac{1}{25}; \frac{1}{24}\right)$ □

Задача 3.16. *Нехай* a *і* b*, такі дійсні числа, що рівняння*

$$x^3 + \sqrt{3}\,(a - 1)\,x^2 - 6ax + b = 0$$

має три дійсних корені. Доведіть, що $|b| \leqslant |a + 1|^3$.

(Білорусь, 1995 р.)

Розв'язання. Нехай x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + \sqrt{3}\,(a - 1)\,x^2 - 6ax + b = 0$. Тоді, за формулами Вієта, матимемо:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= \sqrt{3}\,(1 - a), \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 &= -6a, \\ x_1 x_2 x_3 &= -b.\end{aligned}$$

Розділ 4

Числові послідовності на математичних олімпіадах

4.1. Знаходження загального члена послідовності

Під *числовими послідовностями* розуміють відображення $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ або $a\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, значення яких позначають через a_n, а саму числову послідовність — через (a_n) або $\{a_n\}$ (вказуючи, можливо, яких значень може набувати аргумент n: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$). Рівність виду $a_n = f(n)$, де $f(n)$ — алгебраїчний вираз із змінною n, називають *загальним членом* числової послідовності (a_n). Нерідко числові послідовності задаються *рекурентно*, тобто визначаються рівностями, які вказують на зв'язок кожного члена послідовності з кількома попередніми її членами. Часто в задачах послідовності задають саме рекурентно, а їх розв'язання передбачає знаходження формули загального члена послідовності. В цьому пункті ми на конкретних прикладах продемонструємо відомі на сьогодні методи знаходження формули загального члена послідовностей.

Спочатку розглянемо кілька задач, в яких для виведення формули n-го члена послідовності використовують функцію «ціла частина числа».

Задача 4.1. *Знайти формулу загального члена послідовності*

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots.$$

(Математичні змагання Німеччини, 1994 р.)

Розв'язання. Вивчаючи цю послідовність ми помічаємо, що m-й її член буде дорівнювати n тоді і тільки тоді, коли виконується наступна нерівність:

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + 1 \leqslant m \leqslant 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n,$$

тобто

$$\frac{(n-1)n}{2} + 1 \leqslant m \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

Спробуємо звідси знайти n. Для цього перепишемо останню нерівність у еквівалентному вигляді:

$$n^2 - n + 2 \leqslant 2m \leqslant n^2 + n.$$

Розв'язання. З умови задачі випливає, що різним значенням аргумента відповідають різні значення функції (тобто те, що шукана функція f є ін'єктивною). Справді, нехай m і n — такі натуральні числа, що $m \neq n$ і $f(m) = f(n)$. Тоді, $f(f(m)) = f(f(n))$, тобто $3m = 3n$, а отже і $m = n$. Протиріччя.

Далі, із умови задачі знаходимо, що $f(3n) = f(f(f(n))) = 3f(n)$, тобто $f(3n) = 3f(n)$ для будь-якого натурального n. Зокрема $f(3) = 3f(1)$. Якщо $f(1) = 1$, то одержуємо:

$$3 = 3 \cdot 1 = f(f(1)) = f(1) = 1,$$

що дає неправильну рівність $3 = 1$. Одержане протиріччя дає нам, що $f(1) > 1$. Враховуючи монотонність нашої функції, одержуємо, що $3 = f(f(1)) > f(1) > 1$, тобто $f(1) = 2$. Далі, $f(2) = f(f(1)) = 3$. Крім того,

$$f(3) = 3f(1) = 3 \cdot 2 = 6, f(6) = f(3 \cdot 2) = 3f(2) = 3 \cdot 3 = 9.$$

Оскільки f монотонно зростає, то

$$6 = f(3) < f(4) < f(5) < f(6) = 9,$$

тобто $f(4) = 7$ і $f(5) = 8$, як проміжні натуральні значення між 6 і 9. Ці знайдені значення нашої функції дають можливість знайти наступні:

$$f(7) = f(f(4)) = 3 \cdot 4 = 12,$$

$$f(8) = f(f(5)) = 3 \cdot 5 = 15,$$

$$f(9) = f(f(6)) = 3 \cdot 6 = 18$$

і

$$f(12) = f(f(7)) = 3 \cdot 7 = 21.$$

Значення $f(9) = 12$ і $f(12) = 21$ за допомогою монотонного зростання нашої функції дають можливість знайти проміжні значення: $f(10) = 19$ і $f(11) = 20$.

Якщо для деякого натурального k виконуються рівності $f(k) = n$ і $f(k+1) = n + 1$, де n деяке натуральне. Тоді за умовою задачі виконуватимуться і такі рівності:

$$f(n) = f(f(k)) = 3k$$

і

$$f(n+1) = f(f(k+1)) = 3(k+1) = 3k + 3.$$

Якщо для деякого натурального k виконуються рівності $f(k) = n$ і $f(k+1) = n + 3$, де n деяке натуральне, то аналогічно матимемо, що $f(n) = 3k$ і

Покажчик