

## МІТЕЛЬМАН Ігор Михайлович



Заслужений вчитель України, доцент, кандидат фізико-математичних наук. Працює в Рішельєвському ліцеї при Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова. Член журі численних олімпіад та турнірів юних математиків. У 2004–2006, 2008 та 2011 рр. як задачний координатор (Problem Coordinator) брав участь у Міжнародних математичних олімпіадах. Нагороджений знаком імені Василя Сухомлинського Міністерства освіти і науки України, знаками «Відмінник народної освіти УРСР», «Відмінник освіти України», почесними грамотами Міністерства освіти і науки України, Почесною відзнакою Голови Одеської обласної державної адміністрації.

# І. М. Мітельман

# РОЗВ'ЯЗУЄМО

# ФУНКЦІОНАЛЬНІ

# РІВНЯННЯ

# Міркування від супротивного



Одеса  
ТЕС  
2014

І. М. Мітельман

---

---

**РОЗВ'ЯЗУЄМО  
ФУНКЦІОНАЛЬНІ  
РІВНЯННЯ**  
Міркування від супротивного

---

---

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

**РЕКОМЕНДОВАНО ДО ВИДАННЯ**

Вченою радою Одеського обласного інституту  
удосконалення вчителів  
(протокол від 25 вересня 2014 року №4)

ТА

Вченою радою Інституту математики, економіки та механіки  
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова  
(протокол від 2 липня 2014 року №6)

ОДЕСА



2014

ББК 74.200.58:22.1  
УДК 372.851:517.965

**Рекомендовано до видання**

Вченою радою Одеського обласного інституту  
удосконалення вчителів  
(протокол від 25 вересня 2014 р. №4)

та

Вченою радою Інституту математики, економіки та механіки  
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова  
(протокол від 2 липня 2014 р. №6)

**Рецензенти:**

*Матяш О. І.*, доктор педагогічних наук, доцент  
(Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського);  
*Шевченко Г. М.*, кандидат фізико-математичних наук, доцент  
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка).

**М66 Мітельман, Ігор Михайлович**

Розв'язуємо функціональні рівняння. Міркування від супротивного [Текст] : навч.-метод. посіб. / І. М. Мітельман. — Одеса : ТЕС, 2014. — 67 с.

ISBN 978-617-7054-65-7

Для учнів, які готуються до участі в математичних олімпіадах та бажають поглибити теоретичну підготовку й удосконалити навички в розв'язуванні складних задач, пов'язаних із функціональними рівняннями. Посібник стане в пригоді вчителям математики, керівникам математичних гуртків, організаторам олімпіад, студентам математичних та педагогічних спеціальностей тощо.

**ББК 74.200.58:22.1**  
**УДК 372.851:517.965**

**ISBN 978-617-7054-65-7**

© Мітельман І. М., 2014

За останні десятиріччя функціональні рівняння та нерівності пройшли переконливий шлях від епізодичного появи на олімпіадах до обов'язкової складової завдань математичних змагань школярів і студентів. Зокрема, задачі з такої тематики майже щороку пропонуються на Міжнародних та Всеукраїнських учнівських математичних олімпіадах. Переважна більшість цих задач входить до алгебраїчних розділів олімпіадних завдань, інколи — з певним «нашаруванням» основ математичного аналізу (див., наприклад, [42], а також інші матеріали *Olympiad Training Materials, The IMO Compendium Group, www.imomath.com*) . . .

Матеріал посібника передбачає досить високий рівень підготовки учнів, які працюватимуть з ним . . .

У книжці міститься 57 розібраних задач, чимало вправ для організації самостійної роботи. Запитання, на якими слід поміркувати читачам, містяться також і в тексті розв'язання задач та відповідних зауваженнях. Окремі вправи не пов'язані безпосередньо з доведенням від супротивного, але впливають на формування потрібних технічних навичок, роз'яснення важливих понять тощо.

Значна частина задачного матеріалу посібника присвячена функціональним рівнянням, які містять *ітерації* невідомих функцій, адже, як свідчить практика, такі типи задач традиційно викликають затруднення в учнів, навчальний досвід яких не створює сприятливих умов для вільної роботи з такими функціональними конструкціями. До того ж, розгляд функціональних рівнянь з ітераціями створює мотиваційне поле для занурення до цікавих та корисних теоретичних питань.

Майже для всіх задач і вправ вказується джерело запозичення (посилання на відповідні публікації, математичні олімпіади, турніри та ін.). Зрозуміло, що в деяких випадках визначити «первинне» походження задач досить складно (усталеною практикою укладання завдань олімпіад є використання задач змагань, які відбулись раніше; унаслідок цього запозичена задача інколи отримує нове обличчя). Певні задачі чи факти взагалі набули характеру загальновідомих. Ми вважаємо, що першочерговою метою посилання на математичний захід, де пропонувалася задача, є надання методичних орієнтирів щодо її відносної складності, можливості й доцільності використання на аналогічному рівні (наприклад, під час підготовки учнів до відповідної олімпіади, для проведення відбіркових етапів). У деяких випадках посилання дозволяють звернутися до відповідних олімпіадних матеріалів (книжок, статей, *web*-ресурсів) для

ознайомлення з розв'язанням складних вправ, для пошуку альтернативних розв'язань (останнє взагалі мусить стати обов'язковою складовою підготовки до олімпіад).

Для результативної роботи з посібником учні повинні мати досвід розв'язування функціональних рівнянь, теоретичну та практичну підготовку в обсязі, наприклад, розповсюджених посібників [2, 16, 41] (звернемо особливу увагу на обов'язкове докладне ознайомлення учнів з різними аспектами теорії функціональних рівнянь Коші). Добре зарекомендувала себе відома книжка [44]. Значний довідковий матеріал та обширну бібліографію містить монографія [23].

Сподіваємось, що запропонований навчально-методичний посібник стане в пригоді вчителям математики, керівникам математичних гуртків, студентам математичних та педагогічних спеціальностей, а також учням, які готуються до математичних олімпіад, турнірів, конкурсів Малої академії наук.

## Література

- [1] **Бібік Г. В.** Компетентнісний підхід у навчанні математиці як методична проблема / Г. В. Бібік // Наукові записки КДПУ імені Володимира Вінниченка. Серія «Педагогічні науки». — 2009. — Вип. 82(1). — С. 11–15.
- [2] **Бродский Я. С., Слипенко А. К.** Функциональные уравнения / Я. С. Бродский, А. К. Слипенко. — К. : Вища шк. — 1983. — 96 с.
- [3] **Вороний О. М., Писанко Г. В.** Функціональні рівняння з вільними змінними / О. М. Вороний, Г. В. Писанко // У світі математики. — 2003. — № 1. — С. 18–28.
- [4] **Викол В., Апостолов А.** Функциональные корни / Влад Викол, Апостол Апостолов // Математическое просвещение, сер. 3. — 2005. — № 9. — С. 194–202.
- [5] **Гиндикин С. Г.** Алгебра логики в задачах / С. Г. Гиндикин. — М. : Наука, 1972. — 288 с.
- [6] **Гжегорчик А.** Популярная логика / А. Гжегорчик. — М. : Наука, 1979. — 112 с.
- [7] **Груденов Я. И.** Совершенствование методики работы учителя математики / Я. И. Груденов. — М. : Просвещение, 1990. — 223 с.
- [8] **Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування** : навч.-метод. посіб. / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. — Львів : Євросвіт, 1999. — 128 с.
- [9] **Зарубежные математические олимпиады** / [С. В. Конягин, Г. А. Тоноян, И. Ф. Шарыгин и др.] ; под ред. Сергеева И. Н. — М. : Наука, 1987. — 416 с.

- [10] **Київські** міські математичні олімпіади: 2003–2011 : навч.-метод. посіб. / [А. В. Анікушин, О. О. Клурман, Г. В. Крюкова та ін.] ; за ред. Б. В. Рубльова. — Х. : Гімназія, 2011. — 192 с.
- [11] **Колмогоров А. Н.** О профессии математика / А. Н. Колмогоров. — М. : МГУ, 1959. — 30 с.
- [12] **Крутецкий В. А.** Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. — М. : Просвещение, 1968. — 432 с.
- [13] **Лейфура В. М.** Математичні задачі евристичного характеру / В. М. Лейфура. — К. : Вища шк., 1992. — 91 с.
- [14] **Математичні** олімпіади школярів України: 1991–2000 : навч.-метод. посіб. / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. — К. : Техніка, 2003. — 541 с.
- [15] **Математичні** олімпіади школярів України: 2001–2006 : навч.-метод. посіб. / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. — Львів : Каменяр, 2008. — 348 с.
- [16] **Лихтарников Л. М.** Элементарное введение в функциональные уравнения / Л. М. Лихтарников. — СПб. : Лань, 1997. — 160 с.
- [17] **Лихтарников Л. М.** Первое знакомство с математической логикой / Л. М. Лихтарников. — СПб. : Лань, 1997. — 112 с.
- [18] **Математичні** олімпіадні змагання школярів України: 2007–2008 та 2008–2009 : навч.-метод. посіб. / [Андрій Анікушин, Андрій Арман, Євген Білокопитов та ін.] ; за ред. Б. В. Рубльова. — Львів : Каменяр, 2010. — 549 с.
- [19] **Математичні** олімпіадні змагання школярів України: 2009–2010 : навч.-метод. посіб. / [А. В. Анікушин, А. Р. Арман, А. Є. Данилова та ін.] ; за ред. Б. В. Рубльова. — Х. : Гімназія, 2011. — 320 с.
- [20] **Мітельман І. М.** Вибрані задачі відкритих математичних олімпіад та фестивалів Рішельєвського ліцею : навч.-метод. посіб. / І. М. Мітельман. — Одеса : ТЕС, 2010. — 245 с.
- [21] **Мітельман І. М.** Олімпіадні задачі про покриття клітчастих областей конгруентними поліміно. Дидактичні та практичні аспекти

- розв'язування / І. М. Мітельман // Математика. — 2013. — № 3. — С. 18–24; № 4. — С. 15–24.
- [22] **Московские** математические олимпиады: 1993–2005 / Р. М. Федоров, А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, И. В. Яценко ; под ред. В. М. Тихомирова. — М. : МЦНМО, 2006. — 456 с.
- [23] **Нечепуренко М. И.** Итерации вещественных функций и функциональные уравнения / М. И. Нечепуренко. — Новосибирск : ИВМиМГ СО РАН, 1997. — 228 с.
- [24] **Новиков П. С.** Элементы математической логики / П. С. Новиков. — М. : ГИФМЛ, 1959. — 400 с.
- [25] **Пенцак Є. Я., Юрчишин А. С.** Функційні рівняння : навч.-метод. посіб. / Є. Пенцак, А. Юрчишин. — Львів : ЛДУ, 1998. — 112 с.
- [26] **Пихтар М. П.** Методика роботи та система задач з теми «Функціональні рівняння» / Микола Пихтар // Математика в школі. — 2008. — № 7–8. — С. 48–56; № 9. — С. 48–52.
- [27] **Раков С. А.** Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти / Сергій Раков // Математика в школі. — 2005. — № 9. — С. 2–8.
- [28] **Семенець С. П.** Навчальне моделювання методів доведення в шкільному курсі математики / Сергій Семенець // Математика в школі. — 2006. — № 9. — С. 12–16.
- [29] **Скафа Е. И.** Эвристический подход в обучении математике / Е. И. Скафа // Дидактика математики: проблемы і дослідження. Міжнародний збірник наукових робіт. — 2000. — Вип 14. — С. 33–40.
- [30] **Слепкань З. І.** Методика навчання математики : підруч. для студ. матем. спец. / З. І. Слепкань. — К : Вища шк., 2006. — 582 с.
- [31] **Столл Роберт Р.** Множества. Логика. Аксиоматические теории / Роберт Р. Столл. — М. : Просвещение, 1968. — 231 с.
- [32] **Столяр А. А.** Педагогика математики : уч. пос. для студ. пед. инст. / А. А. Столяр. — Минск : Высшейш. шк., 1986. — 414 с.



- [33] **Теплінський О. Ю.** Сконструймо ... функцію! / О. Теплінський // У світі математики. — 1998. — № 3. — С. 3–12.
- [34] **Толпыго А. К.** Тысяча задач Международного математического Турнира городов / А. К. Толпыго. — М. : МЦНМО, 2009. — 456 с.
- [35] **Уёмов А. И.** Основы практической логики с задачами и упражнениями : уч. пос. для студ. / Авенир Уёмов. — Одесса : ОГУ, 1997. — 388 с.
- [36] **Шапиро С. И.** Решение логических и игровых задач / С. И. Шапиро. — М. : Радио и связь, 1984. — 152 с.
- [37] **Шеварёв П. А.** Процессы мышления в учебной работе школьника / П. А. Шеварёв // Советская педагогика. — 1946. — № 3. — С. 94–109.
- [38] **Шеварёв П. А.** Обобщённые ассоциации в учебной работе школьников / П. А. Шеварёв. — М. : АПН РСФСР, 1959. — 302 с.
- [39] **Шиханович Ю. А.** Введение в современную математику. Начальные понятия / Ю. А. Шиханович. — М. : Наука, 1965. — 376 с.
- [40] **Эрдниев П. М.** Преподавание математики в школе / П. М. Эрдниев. — М. : Просвещение, 1978. — 304 с.
- [41] **Ясінський В. А.** Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції / В. А. Ясінський. — Х. : ВГ «Основа», 2005. — 96 с.
- [42] **The IMO Compendium.** A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009 / Dušan Djukić, Vladimir Janković, Ivan Matić, Nikola Petrović. — New York : Springer, 2011. — 809 p.
- [43] **Kuczma M.** Iterative Functional Equations / Marek Kuczma, Bogdan Choczewski, Roman Ger. — New York : Cambridge University Press, 1990. — 654 p.
- [44] **Venkatachala B. J.** Functional Equations. A Problem Solving Approach / B. J. Venkatachala. — Bangalore : Prism Books Pvt Ltd, 2002. — 219 p.