Геометрія + тригонометрія

Вивчення геометрії наближує до безсмертних богів.

Платон

Що вже казати про тригонометрію!

Ю.В.

1. Нехай прямі a та b перетинаються в точці O, точка P не лежить на прямих. Через точку P провели пряму l, яка перетинає прямі a і b в точках A і B відповідно. Довести, що $\dfrac{AO \cdot PB}{BO \cdot PA}$ не залежить від прямої l.
2. На колі з діаметром AB взято дві точки C і D. Пряма CD перетинає дотичну до кола, проведену через B, в точці X. Знайти довжину BX, якщо $AB = 2R$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAD = \beta$.
3. У вписаному чотирикутнику $ABCD$ кут між діагоналями дорівнює φ. Довести, що $S_{ABCD} = 2R^2 \sin\angle A \sin\angle B \sin\varphi$. (Підказка: R — це радіус кола.)
4. Серединний перпендикуляр до бісектриси AD трикутника ABC перетинає пряму BC в точці E. Довести, що $BE : CE = AB^2 : AC^2$.
5. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC зовнішнім чином побудовано квадрат $ABPQ$. Нехай $\angle ACQ = \alpha$, $\angle QCP = \beta$, $\angle PCB = \gamma$. Довести, що $\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma$.
6. Всередині трикутника ABC взято точку P таку, що $\angle PAB = 10°$, $\angle PAC = 40°$, $\angle PBA = 20°$, $\angle PCA = 30°$. Довести, що трикутник ABC — рівнобедрений.
7. У рівнобедреному трикутнику $\angle B = 20°$. На бічних сторонах BC і AB взято точки D і E такі, що $\angle DAC = 60°$, $\angle ECA = 50°$. Знайти $\angle ADE$.
8. Точка A_1 — центр квадрата, вписаного в трикутник ABC таким чином, що дві його вершини лежать на сторонах AB і AC, а дві інші — на стороні BC. Аналогічно визначаються точки B_1 і C_1. Довести, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні.
9. Нехай M — середина сторони AB трикутника ABC, в якому $\angle CAB = 15°$ і $\angle ABC = 45°$. Знайти $\angle ACM$.