# ***Алгебра***

## ***Заняття***

***Книжка підвищеної скдладності Алгебра 9 клас Якір, Полонський, Мерзляк.***

1. Доведіть нерівність: $\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+...+\frac{1}{n(n+1)}<1 \quad n\in ¥$ .
2. 2.13
3. 2.14
4. Доведіть: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, де $a, b\geq 0$, і при тому рівність досягається лише при $a=b$. Перший вираз називається середнім квадратичним, другий - середнім арифметичним, третій – середнім геометричним, четвертий – середнім гармонічним. (Узагальнений факт(доводити не треба): $\sqrt[n]{\frac{a_1^n+a_2^n+...+a_k^n}{k}}\geq\sqrt[n-1]{\frac{a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+...+a_k^{n-1}}{k}}\geq...\geq\sqrt[2]{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_k^2}{k}}\geq\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}\geq\sqrt[k]{a_1a_2..a_k}$ , де $a_1, a_2, a_3, .., a_k\geq 0$ , і рівність досягається лише коли всі числа між собою рівні)
5. Доведіть: $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$ , якщо $a,b,c\geq 0$ .
6. $a, b, c$ *– сторони трикутника.* Доведіть, що $(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)\leq abc$ . (Підказка: зробіть заміну $a=x+y, b=y+z, c=z+x$, де $x,y,z>0$, і подумайте чому можна так зробити)
7. 3.67
8. Відомо: $a+b+c=3$. Знайдіть максимальне значення виразу $ab+bc+ca$ . ( Метод Штурма: фіксуєту суму $a+b=s$, і доведіть, що $ab$ - зростає, якщо модуль різниці $|a-b|$ спадає. І за допомогою цього знайдіть максимум $ab+bc+ca$ ).

# ***Домашка***

1. 2.15!
2. $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ !!!( $x,y,z$ - дійсні)
3. 2.17
4. 2.18
5. 2.24
6. 2.31
7. 2.32
8. 2.35
9. 2.41
10. 2.45
11. 2.48
12. 2.50

13.2.60

14.2.64

15.2.65

16. $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$

17. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$ , де $a, b, c, d > 0,\ abcd = 1$

18. Доведіть, що $(a+bc)(b+ac)(c+ab)$ - квадрат цілого числа, якщо $a, b, c$ - цілі та $a+b+c=1$.

19. Відомо, $a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = 2004$, $a, b, c, d$ - цілі. Доведіть: $m = 2(a+b)(c+d)(ac - bd - 2004)$ - квадрат цілого числа.

20. $a_1, a_2, ..., a_{20}$ такі, що: $a_1 \geq a_2 \geq .. \geq a_{20} \geq 0,\ a_1 + a_2 = 20,\ a_3 + a_4 + .. + a_{20} \leq 20.$ Знайдіть найбільше значення виразу $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + .. + a_{20}^2$ і для яких значень воно досягається?