Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2014 г.

Решения задач

8 класс. Первый день

8.1. (*Ю. Зайцева, Д. Швецов*) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается катетов AC и BC в точках B_1 и A_1, а гипотенузы — в точке C_1. Прямые C_1A_1 и C_1B_1 пересекают CA и CB соответственно в точках B_0 и A_0. Докажите, что $AB_0 = BA_0$.

Решение. *Первый способ.* Пусть I_A — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC и продолжения стороны BC в точках B_2 и A_0' соответственно (см. рис. 8.1). Тогда $I_AB_2CA_0'$ — квадрат, а значит $I_AA_0' = B_2C$. Как известно, $B_2C = AB_1$, значит $I_AA_0' = AB_1$. Следовательно, четырехугольник $A_0'I_AAB_1$ — параллелограмм, то есть $A_0'B_1 \parallel I_AA$. С другой стороны, $I_AA \parallel B_1C_1$, следовательно, точки A_0', B_1 и C_1 лежат на одной прямой и A_0' совпадает с A_0. Тогда BA_0 — отрезок касательной к вневписанной окружности, то есть он равен полупериметру треугольника ABC. Аналогично получаем, что отрезок AB_0 равен полупериметру этого же треугольника, откуда $AB_0 = BA_0$.

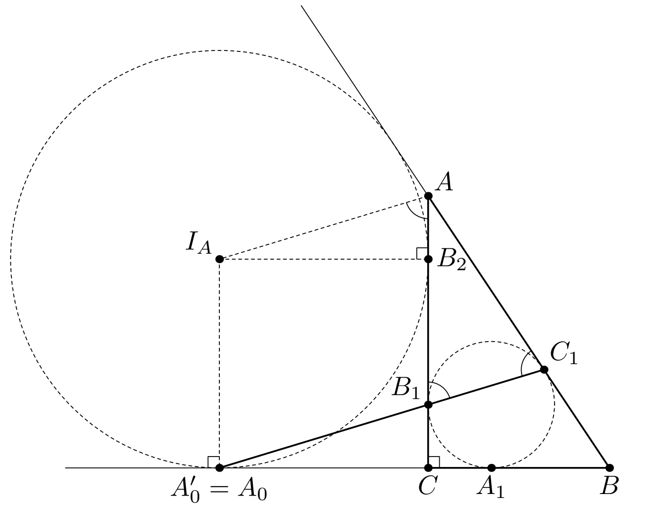

Рис. 8.1

Второй способ. Так как отрезки CA_1 и CB_1 равны радиусу r вписанной окружности, а прямые C_1A_1, C_1B_1 перпендикулярны биссектрисам углов B и A соответственно, из прямоугольных треугольников CA_0B_1 и CB_0A_1 получаем, что $A_0C = \dfrac{r}{\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}}$, $B_0C = \dfrac{r}{\operatorname{tg}\frac{\angle B}{2}}$. С другой стороны $AC = r + \dfrac{r}{\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}}$, $BC = r + \dfrac{r}{\operatorname{tg}\frac{\angle B}{2}}$. Следовательно, $AB_0 = AC + CB_0 = BC + CA_0 = BA_0$.

8.2. (*Б. Френкин*) Пусть AH_a и BH_b — высоты, а AL_a и BL_b — биссектрисы треугольника ABC. Известно, что $H_aH_b \parallel L_aL_b$. Верно ли, что $AC = BC$?

Ответ: да.

Решение. *Первый способ.* Так как треугольники H_aH_bC и ABC подобны (см. рис. 8.2а), треугольники L_aL_bC и ABC также подобны, то есть $\dfrac{L_aC}{AC} = \dfrac{L_bC}{BC}$. Значит подобны треугольники AL_aC и BL_bC. Следовательно, $\angle L_aBL_b = \angle L_bAL_a$, но эти углы равны половинам углов B и A треугольника. Значит $AC = BC$.

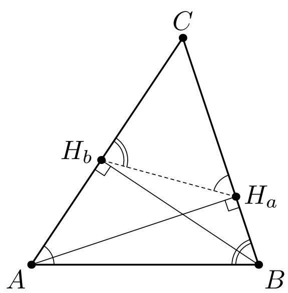

Рис. 8.2а

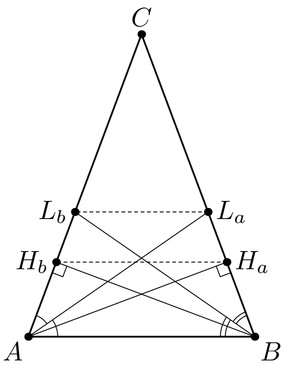

Рис. 8.2б

Второй способ. Так H_aH_b и AB антипараллельны относительно прямых AC и BC, L_aL_b и AB также антипараллельны относительно AC и BC, значит четырехугольник AL_bL_aB вписанный. Тогда, как и в предыдущем решении, получаем, что $\angle L_aBL_b = \angle L_bAL_a$ и $AC = BC$.

8.3. (*А. Блинков*) В треугольнике ABC отмечены середины сторон AC и BC — точки M и N соответственно. Угол MAN равен $15°$, а угол BAN равен $45°$. Найдите угол ABM.

Ответ: 75°.

Решение. *Первый способ.* Продолжим отрезок MN на его длину в обе стороны и получим точки K и L (см. рис. 8.3а). Так как M — общая середина AC и KN, то $AKCN$ — параллелограмм. Тогда $\angle CKM = 45^\circ$, $\angle KCM = 15^\circ$. Отметим на отрезке CM точку P так, чтобы угол CKP был равен 15°. Тогда отрезок KP разобьет треугольник KCM на два равнобедренных треугольника. Кроме того, $\angle PMN = 60^\circ$, поэтому треугольник MPN – равносторонний. Треугольники PLN и PKM равны, треугольник CPL — равнобедренный и прямоугольный, отсюда $\angle CLN = \angle CLP + \angle MLP = 75^\circ = \angle ABM$, так как $CLBM$ — параллелограмм.

Можно использовать также, что построенная точка P — центр описанной окружности треугольника KCL.

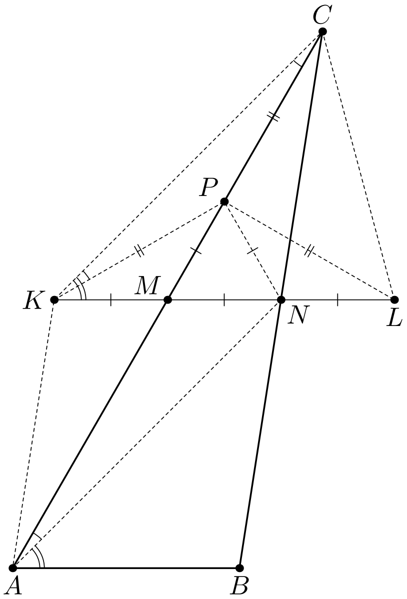

Рис. 8.3а

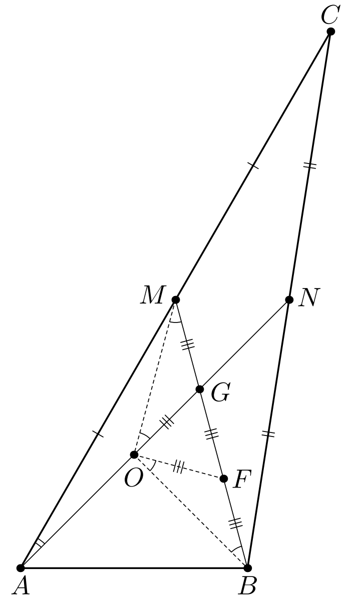

Рис. 8.3б

Второй способ. Пусть G — точка пересечения медиан треугольника ABC, F — середина GB, треугольник GFO равносторонний, причем точки O и A лежат в одной полуплоскости относительно MB (см. рис. 8.3б). Поскольку $\angle MOB = 120^\circ$, то O — центр окружности, описанной около треугольника MAB, при этом $\angle MOG = 30^\circ = 2\angle MAG$, значит AG и OG пересекаются на описанной окружности треугольника AMB, то есть точки A, O и G лежат на одной прямой. Тогда $\angle ABM = \dfrac{\angle MOA}{2} = 75^\circ$.

8.4. (*Т. Казицына*) Таня вырезала из клетчатой бумаги треугольник, изображённый на рисунке 8.4а. Через некоторое время линии сетки выцвели. Сможет ли Таня их восстановить, не пользуясь никакими инструментами, а только перегибая треугольник? (Длины сторон треугольника Таня помнит.)

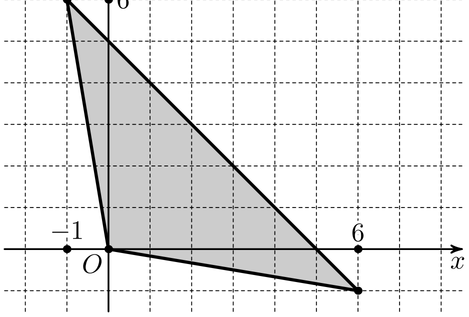

Рис. 8.4а

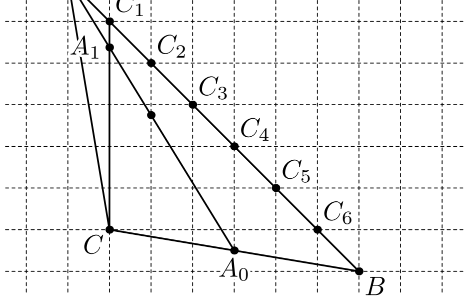

Рис. 8.4б

Решение. Пусть ABC — данный треугольник ($AC = BC$). Заметим, что сгибая бумагу, можно найти середину любого заданного отрезка. Построим медиану AA_0. По теореме Фалеса вертикальные линии сетки делят ее на четыре равные части. Поэтому, построив точку A_1 такую что $AA_1 = AA_0/4$ и перегнув треугольник по прямой A_1 получим точку C_1, такую, что $AC_1 = AB/7$ (см. рис. 8.4б). Теперь, построив отрезки $C_1C_2 = C_2C_3 = \ldots = C_5C_6 = AC_1$, мы найдем все узлы сетки, лежащие на стороне AB. Перегнув треугольник по прямой, проходящей через C_2, так, чтобы точка C_3 попала на прямую CC_1, мы получим линию сетки, проходящую через C_2, и т. д. Перпендикулярные линии строятся аналогично.

Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2014 г.

Решения задач
8 класс. Второй день

8.5. (*А. Шаповалов*) Дан треугольник с углами 30, 70 и 80 градусов. Разрежьте его отрезком на два треугольника так, чтобы биссектриса одного из этих треугольников и медиана второго, проведённые из концов разрезающего отрезка, были параллельны друг другу. (*Достаточно найти одно решение.*)

Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 80°$ (см. рис. 8.5). Проведем высоту AH. Тогда $\angle CAH = \angle MHA = 10°$, где M — середина AC. При этом $\angle HAL = 10°$, где L — основание биссектрисы треугольника HAB, проведенной из вершины A. Значит медиана треугольника AHC, проведенная из вершины H, и биссектриса треугольника BAH, проведенная из вершины A, параллельны, а высота AH является искомым разделяющим отрезком.

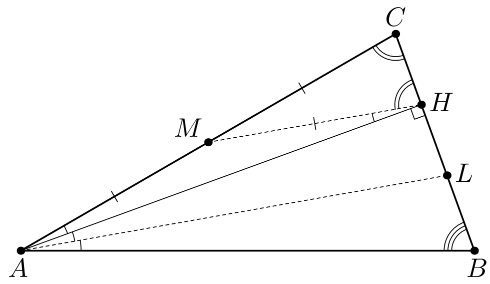

Рис. 8.5

8.6. (*В. Ясинский*) Две окружности k_1 и k_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке O. Точки X и Y лежат на k_1 и k_2 соответственно так, что лучи O_1X и O_2Y одинаково направлены. Из точки X проведены касательные к k_2, а из точки Y — к k_1. Докажите, что эти четыре прямые касаются одной окружности, проходящей через точку O.

Решение. Обозначим через S точку пересечения XO_2 и YO_1 (см. рис. 8.6). Пусть r_1 и r_2 — радиусы соответствующих окружностей. Тогда $\dfrac{XS}{SO_2} = \dfrac{O_1S}{SY} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{O_1O}{OO_2}$. Значит, $SO \parallel O_2Y$ и $SO = \dfrac{r_1}{r_1+r_2}O_2Y = \dfrac{r_1r_2}{r_1+r_2}$.

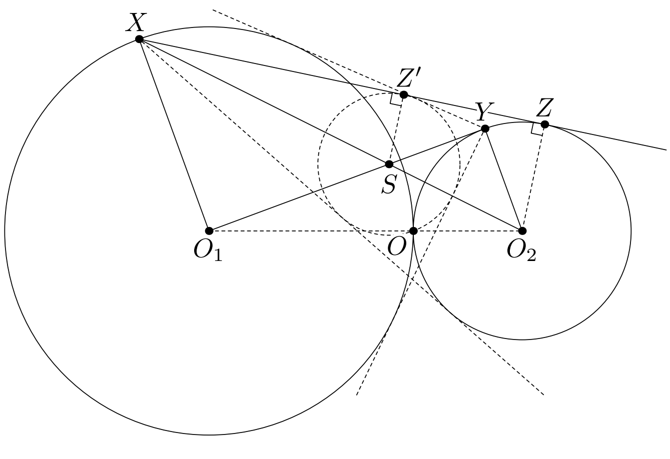

Рис. 8.6

Пусть XZ — одна из касательных из X ко второй окружности, а Z' — проекция S на XZ. Тогда $SZ' = \dfrac{r_1}{r_1+r_2}O_2Z = \dfrac{r_1r_2}{r_1+r_2} = SO$. Аналогично доказывается, что расстояние от S до остальных касательных также равно SO, то есть S и есть центр требуемой окружности.

8.7. (*Фольклор*) Две точки окружности соединили ломаной, длина которой меньше диаметра окружности. Докажите, что существует диаметр, не пересекающий эту ломаную.

Решение. Пусть точки A и B — концы ломаной. Рассмотрим диаметр XY, параллельный AB (см. рис. 8.7). Пусть точка C симметрична B относительно XY, тогда AC — диаметр окружности. Рассмотрим любую точку Z хорды XY. Так как $AZ+BZ = AZ+CZ \geqslant AC$, Z не может лежать на ломаной, а значит диаметр XY подходит.

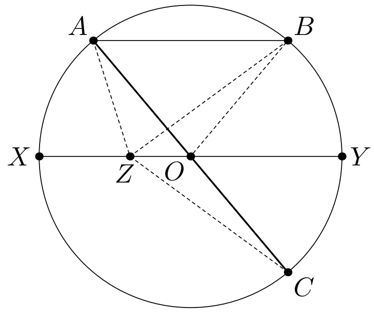

Рис. 8.7

8.8. (*Tran Quang Hung*) Пусть M — середина хорды AB окружности с центром O. Точка K симметрична M относительно O, P — произвольная точка окружности. Перпендикуляр к AB в точке A и перпендикуляр к PK в точке P пересекаются в точке Q. Точка H — проекция P на AB. Докажите, что прямая QB делит отрезок PH пополам.

Решение. *Первый способ.* Пусть w — данная окружность (с центром в точке O) и QA пересекает w в точке C, отличной от A (см. рис. 8.8а). Так как BC — диаметр w, то отрезки BC и MK делят друг друга пополам, то есть $CKBM$ — параллелограмм. Тогда, поскольку M — середина AB, то $CKMA$ — прямоугольник. Докажем, что отрезки MQ и PC перпендикулярны. Мы имеем:

$$MC^2 - MP^2 - QC^2 + QP^2 = (CK^2 + MK^2) - (2PO^2 + 2OK^2 - PK^2) - (QK^2 - CK^2) +$$
$$+ (QK^2 - PK^2) = 2CK^2 + 4OK^2 - 2PO^2 - 2OK^2 = 2CK^2 + 2OK^2 - 2OC^2 = 0.$$

Значит, $MQ \perp PC$. Пусть BP пересекает QA в точке R. Так как CB — диаметр w, $BR \perp PC$. Следовательно, $MQ \parallel BR$, и поскольку M — середина AB, то Q — середина AR. Значит QB делит PH пополам.

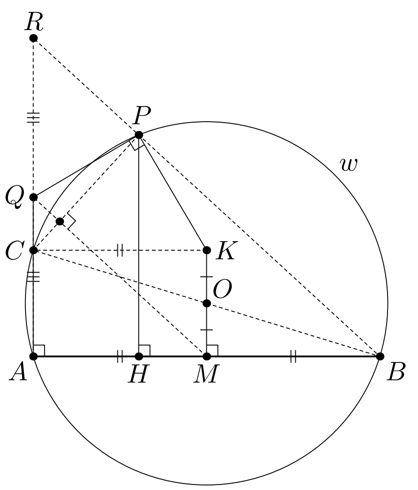

Рис. 8.8а

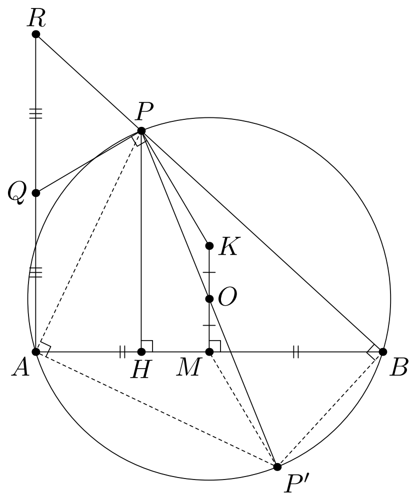

Рис. 8.8б

Второй способ. Заметим, что $\angle PBA \neq 90^\circ$; иначе $PK \parallel AB$, и точка Q не существует. Тогда прямая BP пересекает AQ в некоторой точке R (см. рис. 8.8б). Треугольники BPH и BRA гомотетичны, так что достаточно доказать, что Q — середина AR.

Пусть P' — точка, диаметрально противоположная к P. Тогда $PA \perp P'A$, $PR \perp P'B$, $AR \perp AB$, то есть в треугольниках $P'AB$ и PAR соответственные стороны перпендикулярны. Значит, они подобны, и их медианы из вершин P и P' также перпендикулярны. Но из симметрии относительно O следует, что $P'M \parallel PK$ и $P'M \perp PQ$. Это и означает, что PQ — медиана в $\triangle PAR$.

Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2014 г.

Решения задач

9 класс. Первый день

9.1. (*В. Ясинский*) Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Докажите, что $AC > BD$ тогда и только тогда, когда $(AD - BC)(AB - CD) > 0$.

Решение. *Первый способ.* Без ограничения общности можно считать, что дуги ABC и BCD не превосходят полуокружности. Тогда $\smile AD = 2\pi - \smile ABC - \smile BCD + \smile BC > \smile BC$. Поскольку дуга $ABCD$ также больше дуги BC, получаем, что $AD > BC$.

Теперь, если $AC > BD$, то $\smile ABC > \smile BCD$, $\smile AB > \smile CD$ и $AB > CD$. При $AC < BD$ все неравенства меняются на противоположные.

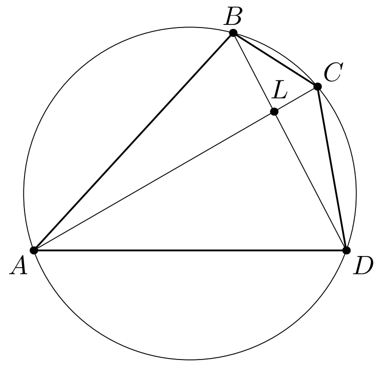

Рис. 9.1

Второй способ. Пусть AL — самый длинный из отрезков AL, BL, CL, DL (см. рис. 9.1). Тогда, в силу равенства $AL\cdot CL = BL\cdot DL$, CL — самый короткий из этих отрезков. Тогда $AL - CL > |BL - DL|$, отсюда $AC^2 = (AL+CL)^2 = (AL-CL)^2 + 4AL\cdot CL > |BL-DL|^2 + 4BL\cdot DL = (BL+DL)^2 = BD^2$, из чего и следует утверждение задачи.

9.2. (*Ф. Нилов*) В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C — прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину диагонали AC.

Решение. Пусть M, N, K — середины AB, CD и AC соответственно. Тогда степень точки K относительно окружности с диаметром AB равна $KM^2 - MA^2 = \dfrac{CB^2 - AB^2}{4}$, а относительно окружности с диаметром CD — $\dfrac{AD^2 - CD^2}{4}$. Так как $AB^2 + AD^2 = BD^2 = BC^2 + CD^2$, получаем, что степени равны.

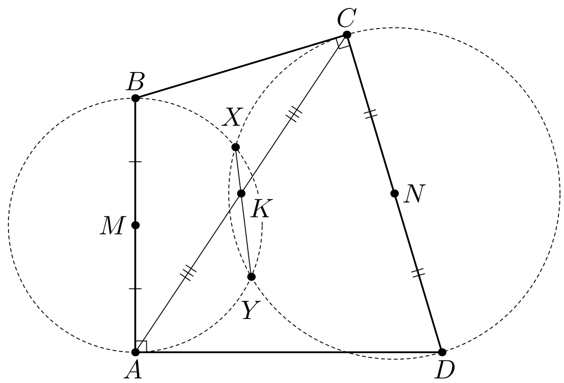

Рис. 9.2

9.3. (*Е. Диомидов*) Дан острый угол A и точка E внутри него. Построить на сторонах угла точки B, C так, чтобы E была центром окружности Эйлера треугольника ABC. (*Исследование проводить не требуется.*)

Решение. *Первый способ.* Пусть M, K и L — середины сторон AB, BC и AC соответственно. Тогда $\angle LEM = 2\angle LKM = 2\angle A$. Обозначим стороны $\angle A$ через l_1 и l_2 так, чтобы при повороте вокруг A на $\angle A$ против часовой стрелки l_1 переходила в l_2. Тогда при повороте по часовой стрелке вокруг E на угол $2\angle A$ середина стороны треугольника, лежащей на l_1, перейдет в середину стороны, лежащей на l_2. Поэтому точка, симметричная A относительно M, будет вершиной треугольника. Вторая вершина строится аналогично.

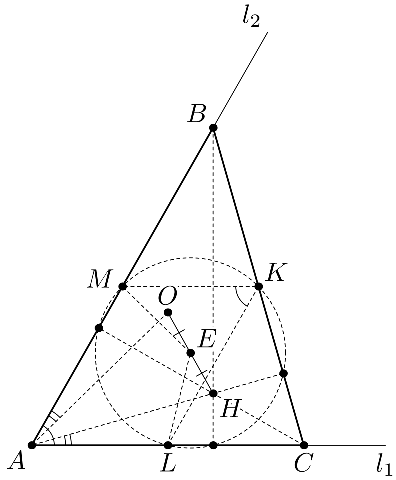

Рис. 9.3

Второй способ. Пусть O и H — центр описанной окружности и ортоцентр треугольника. Тогда E — середина отрезка OH, $\angle BAO = \angle HAC$ и $AH = 2AO\cos\angle A$. Следовательно композиция симметрии относительно биссектрисы угла A, гомотетии с центром A и коэффициентом $2\cos\angle A$ и симметрии относительно E является подобием с центром O. Соответственно, найдя центр этого подобия, можно построить точки B и C как вторые точки пересечения сторон данного угла и окружности с центром O, проходящей через A.

Примечание. При $\angle A = 60^\circ$ рассмотренное подобие будет симметрией относительно прямой, проходящей через E и перпендикулярной биссектрисе угла A. Соответственно, в качестве O можно брать любую точку этой прямой. В остальных случаях решение единственно.

9.4. (*Mahdi ETtesami Fard*) Ортоцентр H треугольника ABC лежит на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что три окружности с центрами A, B, C, проходящие через H, имеют общую касательную.

Решение. *Первый способ.* Пусть H_a, H_b, H_c — основания высот треугольника. Так как $AH \cdot HH_a = BH \cdot HH_b = CH \cdot HH_c$, то существует инверсия с центром H, переводящая точки A, B, C в H_a, H_b, H_c соответственно (в случае остроугольного треугольника надо взять композицию инверсии и центральной симметрии относительно H). При этой инверсии стороны треугольника перейдут в окружности с диаметрами AH, BH, CH, а вписанная окружность — в прямую, касающуюся этих окружностей. Искомая прямая получается из этой гомотетией с центром H и коэффициентом 2.

Второй способ. Пусть I — центр вписанной окружности, A_1, B_1, C_1 — точки её касания со сторонами BC, AC, AB соответственно, а A_2, B_2, C_2 — такие точки (на трёх окружностях из условия), что $\triangle A_1IH \sim \triangle HAA_2$, $\triangle B_1IH \sim \triangle HBB_2$ и $\triangle C_1IH \sim \triangle HCC_2$ (подобные треугольники расположены так, что их стороны соответственно параллельны). Касательные в этих точках к этим окружностям параллельны касательной в H ко вписанной; достаточно доказать, что эти касательные совпадают, а для этого достаточно показать, что проекции векторов $\overrightarrow{HA_2}$, $\overrightarrow{HB_2}$ и $\overrightarrow{HC_2}$ на IH равны. Нетрудно видеть, что они сонаправлены. Поскольку HA_2 составляет равные углы с IH и IA_1, длина первой проекции равна длине проекции HA_2 на AH, то есть $\dfrac{AH}{r} \cdot HA'$, где A' — основание высоты. Аналогично вычисляются остальные проекции; осталось заметить, что $AH \cdot HA' = BH \cdot HB' = CH \cdot HC'$.

Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2014 г.

Решения задач

9 класс. Второй день

9.5. (*Д. Швецов*) В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, O — центр описанной окружности, BL — биссектриса. Описанная окружность треугольника BOL пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке D. Докажите, что $BD \perp AC$.

Решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, D' — точка, симметричная H относительно AC. Тогда D' лежит на описанной окружности, а так как $\angle B = 60^\circ$, то $BO = BH$ (этот факт можно доказать, например, так: заметим, что поскольку $\angle B = 60^\circ$, то описанные окружности треугольников ABC и AOC равны и совмещаются параллельным переносом на вектор BH, поэтому $BH = R = BO$). Значит, поскольку BL — биссектриса угла OBH, то $LO = LH = LD'$. Треугольники LBO и LBH равны (по двум сторонам и углу между ними), отсюда $\angle BOL = \angle BHL$. Из симметрии относительно AC: $\angle BD'L = \angle LHD' = 180^\circ - \angle BHL$, отсюда $\angle BOL + \angle BD'H = 180^\circ$. Следовательно, четырехугольник $BOLD'$ вписанный и D' совпадает с D.

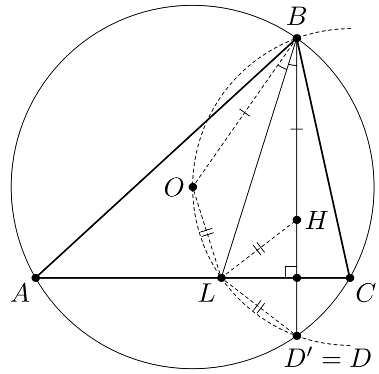

Рис. 9.5

9.6. (*А. Полянский*) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, M, N — середины дуг ABC и BAC описанной окружности. Докажите, что точки M, I, N лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $AC + BC = 3AB$.

Решение. *Первый способ.* Обозначим через A_1, B_1 и C_1 середины дуг BC, CA и AB, не содержащих других вершин треугольника ABC (см. рис. 9.6а), кроме того, пусть A_0 и B_0 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и CA соответственно.

Пусть MN проходит через I. Так как A_1N и B_1M — диаметры, то A_1B_1 и MN равны и параллельны. Как известно, $A_1B_1 \perp CC_1$ и $CC_2 = C_2I$. Из симметрии относительно серединного перпендикуляра к CC_1 имеем $CC_2 = C_1I$, кроме того, из прямоугольного треугольника CA_0I получим, что $C_2A_0 = C_2C$. Тогда, по теореме о трезубце $C_2A_0 = C_2C = IC_1 = C_1A = C_1B$. То есть треугольники C_2CA_0 и C_1AB равны ($AB = CA_0$). Отсюда и получаем равенство $AC + CB = AB_0 + B_0C + CA_0 + A_0B = 2AB + AB_0 + A_0B = 3AB$. В обратную сторону аналогично.

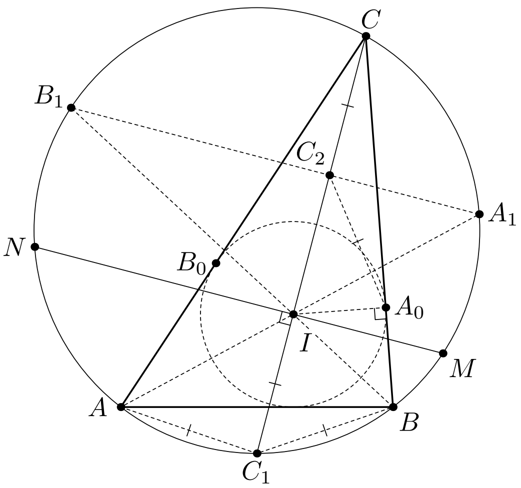

Рис. 9.6а

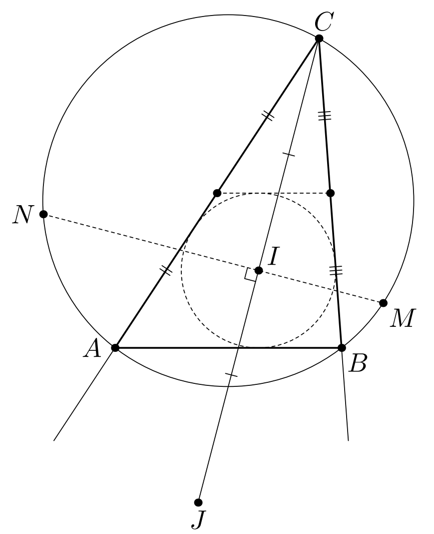

Рис. 9.6б

Второй способ. Пусть J — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB (см. рис. 9.6б). По теореме о трилистнике точки M и N являются центрами окружностей ACJ и BCJ, следовательно MN — серединный перпендикуляр к отрезку CJ, то есть I — середина CJ. Сделав гомотетию с центром C и коэффициентом $1/2$ получим, что вписанная окружность касается средней линии треугольника, параллельной AB. Условие описанности трапеции, образованной этой средней линией и сторонами равносильно требуемому равенству. Обратное утверждение доказывается аналогично.

9.7. (*Н. Белухов*) Девять окружностей расположены вокруг произвольного треугольника, как показано на рисунке 9.7а. Окружности, касающиеся одной и той же стороны треугольника, равны между собой. Докажите, что три прямые на рисунке пересекаются в одной точке. (Прямые проходят через вершины треугольника и центры соответствующих окружностей.)

Решение. Введем обозначения, как на рисунке 9.7б. Пусть r_a, r_b и r_c — радиусы окружностей с центрами O_a, O_b и O_c соответственно, $d_a(X)$ — расстояние от точки X до BC, d_b и d_c определены аналогично.

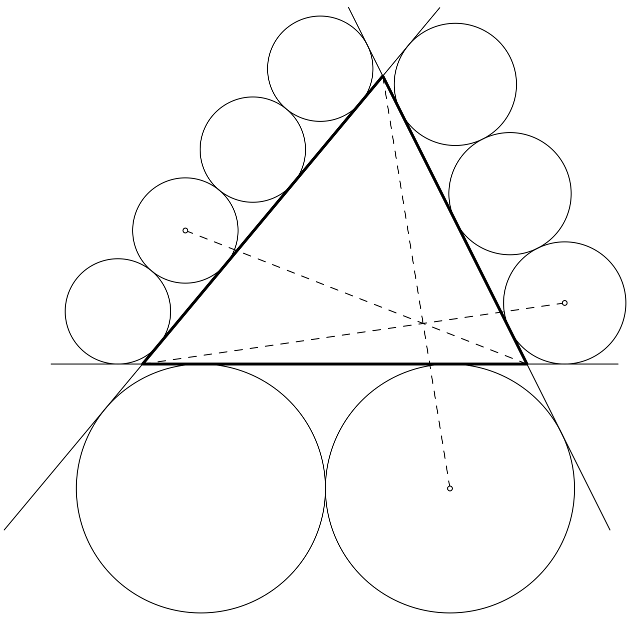

Рис. 9.7а

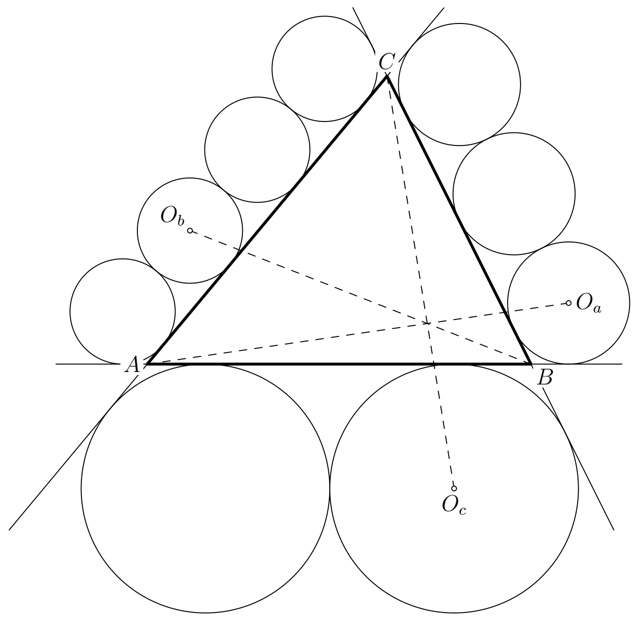

Рис. 9.7б

Фигура, состоящая из лучей CA, CB и трех первых, считая от C, окружностей, касающихся CA, подобна фигуре из лучей CB, CA и окружностей, касающихся CB. Следовательно, $d_a(O_b) : r_b = d_b(O_a) : r_a$. Аналогичные равенства верны для вершин A и B.

Теперь мы имеем

$$\frac{d_c(O_a)}{d_b(O_a)} \cdot \frac{d_a(O_b)}{d_c(O_b)} \cdot \frac{d_b(O_c)}{d_a(O_c)} = \frac{d_c(O_a)}{d_a(O_c)} \cdot \frac{d_b(O_c)}{d_c(O_b)} \cdot \frac{d_a(O_b)}{d_b(O_a)} = \frac{r_a}{r_c} \cdot \frac{r_c}{r_b} \cdot \frac{r_b}{r_a} = 1,$$

что по теореме Чевы влечет утверждение задачи.

9.8. (*Н. Белухов, С. Герджиков*) Выпуклый фанерный многоугольник P лежит на деревянном столе. В стол можно вбивать гвозди, которые не должны проходить через P, но могут касаться его границы. Фиксирующим называется набор гвоздей, не позволяющий двигать P по столу. Найдите минимальное количество гвоздей, позволяющее зафиксировать любой выпуклый многоугольник.

Решение. Если P — параллелограмм, то нужно не менее четырех гвоздей. Действительно, если сторона s не касается никакого гвоздя, от P можно двигать в направлении двух смежных с s сторон.

Покажем теперь, что любой выпуклый многоугольник P можно зафиксировать четырьмя гвоздями.

Пусть окружность c с центром O наибольшая из окружностей, лежащих внутри P, A_1, A_2, $\ldots$, A_k точки касания c со сторонами P, H — выпуклая оболочка этих точек.

Предположим, что существуют две вершины U и V многоугольника H такие, что UV — диаметр c (см. рис. 9.8а). Вобьем два гвоздя в точки U и V. Очевидно, что стороны P, содержащие U и V параллельны, следовательно P можно двигать только в направлении, перпендикулярном UV. Чтобы зафиксировать P, достаточно вбить еще два гвоздя, препятствующие его движению влево и вправо от $\overrightarrow{UV}$.

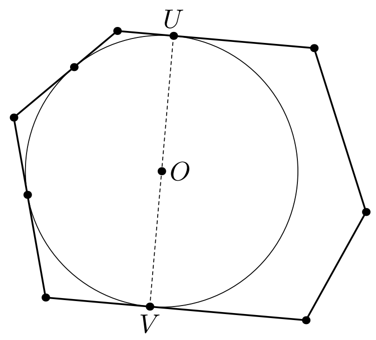

Рис. 9.8а

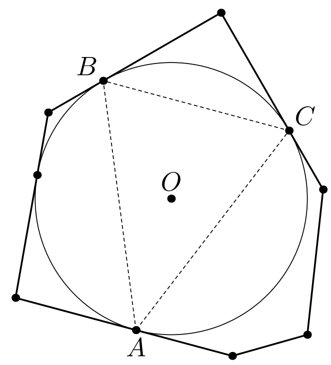

Рис. 9.8б

Будем теперь считать, что стороны и диагонали H не содержат O.

Предположим, что $O \notin H$. Пусть PQ сторона H, разделяющая H и O, а касательные к c в точках P и Q пересекаются в точке T. Тогда существует гомотетия с центром T и коэффициентом, большим 1, переводящая c в большую окружность, лежащую внутри P — противоречие.

Таким образом, $O \in H$. Тогда существует треугольник ABC, содержащий O (см. рис. 9.8б). (A, B, C три точки касания c со сторонами P.) Легко видеть, что три гвоздя, вбитые в точки A, B и C фиксируют P.

Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2014 г.

Решения задач
10 класс. Первый день

10.1 (*И. Богданов, Б. Френкин*) Вершины равнобедренного треугольника и центр его описанной окружности лежат на четырёх различных сторонах квадрата. Найдите углы треугольника.

Ответ: $15°$, $15°$ и $150°$.

Решение. Пусть $ABCD$ — квадрат, вершины X, Y, Z равнобедренного треугольника лежат на сторонах BC, CD, DA соответственно, а центр описанной окружности O треугольника XYZ лежит на AB (см. рис. 10.1). Так как отрезок OY пересекает отрезок XZ, угол XYZ тупой, поэтому основанием равнобедренного треугольника является именно XZ. Тогда отрезки OY и XZ перпендикулярны. Поскольку их соответственные проекции на перпендикулярные прямые BC и AB равны, они и сами равны, то есть сторона треугольника XYZ равна радиусу его описанной окружности.

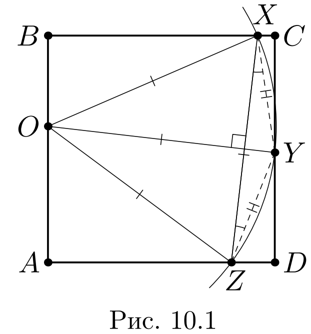

Рис. 10.1

Поскольку угол XYZ тупой, отсюда следует, что $\angle XYZ = 150°$, а тогда остальные углы треугольника равны по $15°$.

10.2 (*А. Зерцалов, Д. Скробот*) Даны окружность, её хорда AB и точка W — середина меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности из точки C пересекает касательные из точек A и B в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.

Решение. *Первый способ.* Пусть отрезки AB и CW пересекаются в точке T (см. рис. 10.2). Тогда $\angle ACW = \angle ABW = \angle TAW$, то есть треугольники CAW и ATW подобны. Тогда, поскольку прямая WX — симедиана в треугольнике CAW, она является медианой в треугольника ATW, то есть точка N — середина AT. Аналогично, точка M — середина BT, откуда $MN = AB/2$.

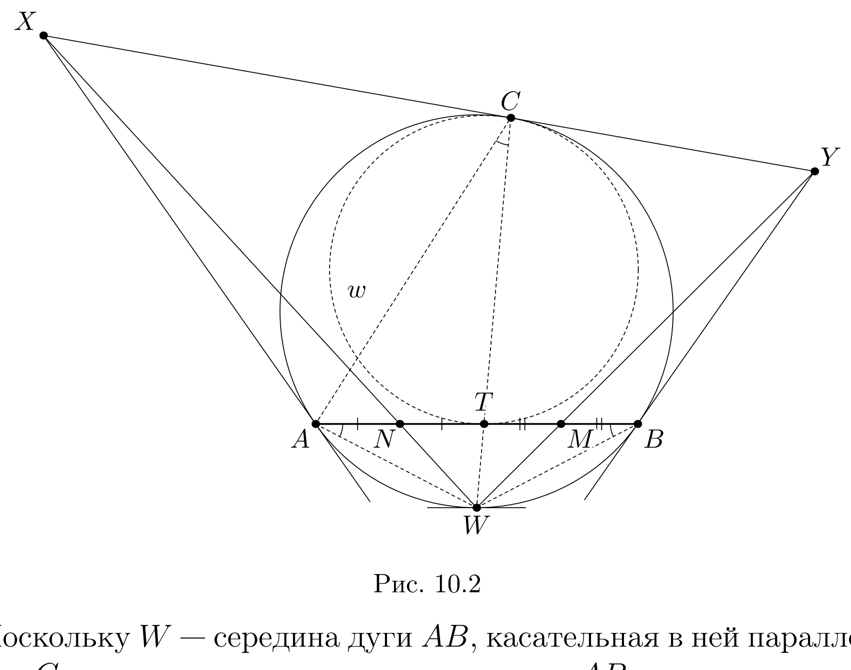

Рис. 10.2

Второй способ. Поскольку W — середина дуги AB, касательная в ней параллельна AB. Совершим гомотетию с центром C, переводящую эту касательную в AB; пусть наша окружность при этой гомотетии переходит в окружность ω, а точка W — в точку T.

Из подобия треугольников CAW и ATW, доказанного в предыдущем способе, следует, что $AW^2 = WC \cdot WT$, то есть W лежит на радикальной оси ω и точки A. Поскольку $XA = XC$, точка X также на ней лежит. Значит, эта радикальная ось есть WX, откуда $NA^2 = NT^2$, и N — середина AT. Аналогично, M — середина BT, откуда $MN = AB/2$.

10.3 (*А. Блинков*) Верно ли, что существуют выпуклые многогранники с любым количеством диагоналей? (*Диагональю называется отрезок, соединяющий две вершины многогранника и не лежащий на его поверхности.*)

Ответ: да.

Решение. Построим выпуклый многогранник с n диагоналями. При $n = 0$ годится любая пирамида.

Пусть $n > 0$. Возьмем $(n+2)$-угольную пирамиду $SA_1 \dots A_{n+2}$. Построим вовне неё на грани $SA_{n+1}A_{n+2}$ как на основании пирамиду $TSA_{n+1}A_{n+2}$ (так, чтобы все $n+4$ построенных вершины находились в выпуклом положении). Объединение этих двух пирамид — выпуклый многогранник $TSA_1 \dots A_{n+2}$, диагоналями которого являются ровно отрезки $TA_1, \dots, TA_n$.

10.4 (*А. Гаркавый, А. Соколов*) Дан фиксированный треугольник ABC. Пусть D — произвольная точка в плоскости треугольника, не совпадающая с его вершинами. Окружность с центром в D, проходящая через A, пересекает вторично прямые AB и AC в точках A_b и A_c соответственно. Аналогично определяются точки B_a, B_c, C_a и C_b. Точку D назовём *хорошей*, если точки A_b, A_c, B_a, B_c, C_a и C_b лежат на одной окружности. Сколько может оказаться точек, хороших для данного треугольника ABC?

Ответ: 2, 3 или 4.

Решение. Очевидно, что центр O описанной окружности Ω треугольника ABC — хорошая точка, поскольку в этом случае $B_a = C_a = A$, $A_b = C_b = B$ и $A_c = B_c = C$.

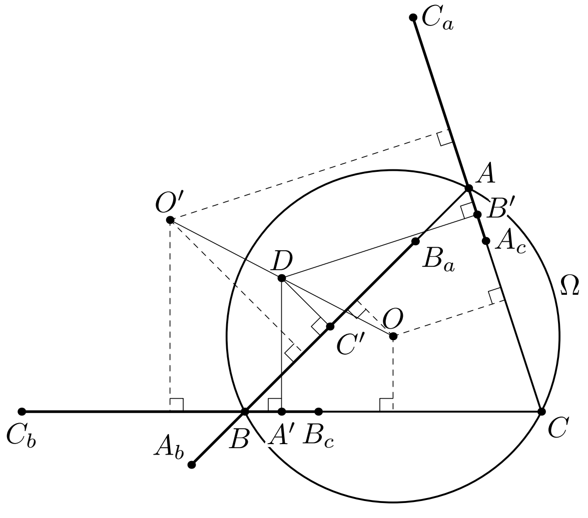

Рис. 10.4а

Рассмотрим теперь любую хорошую точку $D \neq O$. Пусть A', B', C' — проекции D на BC, CA, AB соответственно. Точки A и A_b симметричны относительно C', также как и точки B и B_a. Значит, середины отрезков AB и A_bB_a также симметричны относительно C'; следовательно, серединный перпендикуляр к A_bB_a проходит через точку O', симметричную O относительно D (см. рис. 10.4а). Аналогично, серединные перпендикуляры к A_cC_a и B_cC_b также проходят через O', при этом они не параллельны; значит, O' и является центром окружности, проходящей через шесть точек.

Далее, каждая из точек D и O' равноудалена от A_b и A_c; при этом $D \neq O'$, ибо $D \neq O$. Значит, прямая DO' является серединным перпендикуляром к A_bA_c. Но $B'C'$ — средняя линия в треугольнике AA_bA_c, следовательно, $DO' \perp B'C'$. Аналогично получаем, что $DO' \perp A'B'$, то есть точки A', B' и C' лежат на одной прямой. Значит, D лежит на Ω, а $A'B'C'$ — её прямая Симсона. Кроме того, эта прямая перпендикулярна прямой DO', то есть радиусу DO (см. рис. 10.4б).

Наоборот, пусть точка D окружности Ω такова, что её прямая Симсона перпендикулярна OD. Обращая рассуждения предыдущих двух абзацев, получаем, что точка O' лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам A_bB_a, B_cC_b, A_cC_a, A_bA_c, B_aB_c и C_aC_b, то есть все шесть точек равноудалены от O'. Значит, точка D — хорошая.

Найдём теперь количество описанных точек. Пусть точка X движется по Ω так, что угловая скорость радиуса OX постоянна. Как известно (и нетрудно показать счётом углов), прямая Симсона точки X вращается со вдвое меньшей угловой скоростью в противоположном направлении. Значит, угол между OX и этой прямой меняется с полуторной скоростью, поэтому на описанной окружности существуют три описанных точки. Добавляя центр O, получаем, что хороших точек не больше четырёх.

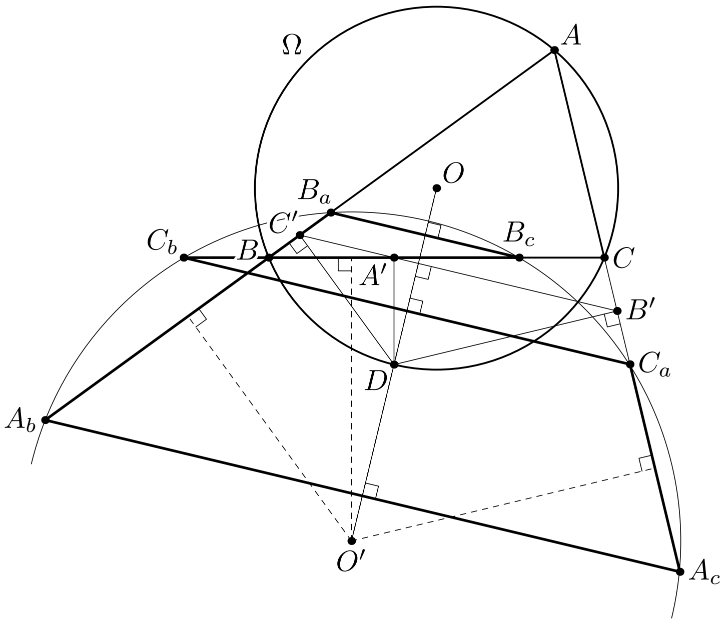

Рис. 10.4б

Осталось учесть, что некоторые из них могут совпасть с вершинами. Поскольку прямая Симсона вершины A — это высота из неё, такое происходит, если радиус OA параллелен BC, то есть $|\angle B - \angle C| = 90°$. Это может произойти и с двумя вершинами — ровно в треугольнике с углами $30°$, $30°$ и $120°$. Отсюда и следует ответ.

Решения задач

10 класс. Второй день

10.5 (*А. Заславский*) В треугольнике провели высоту из одной вершины, биссектрису из другой и медиану из третьей, отметили точки их попарного пересечения, а затем всё, кроме этих отмеченных точек, стерли (три отмеченные точки различны, кроме того, известно, какая является чьим пересечением). Восстановите треугольник. (*Исследование проводить не требуется.*)

Решение. Пусть X, Y, Z — отмеченные точки. Нам требуется построить на прямых XY, YZ и ZX точки A, B и C соответственно так, чтобы в треугольнике ABC высота из A, биссектриса из B и медиана из C лежали соответственно на этих прямых.

Выберем произвольную точку B' и проведём через неё прямую ℓ_1, перпендикулярную XY; тогда ℓ_1 должна быть параллельна BC (см. рис. 10.5). Проведём через B' прямую, параллельную YZ, и отразим ℓ_1 относительно этой прямой; мы получим прямую ℓ_2, параллельную AB. На ℓ_2 выберем произвольную точку A' и проведём через середину отрезка $A'B'$ прямую, параллельную ZX, до пересечения с ℓ_1 в точке C'. Построенный треугольник $A'B'C'$ гомотетичен искомому (он переводится в ABC гомотетией, переводящей A' и B' в A и B соответственно; здесь мы считаем параллельный перенос частным случаем гомотетии с бесконечно удалённым центром).

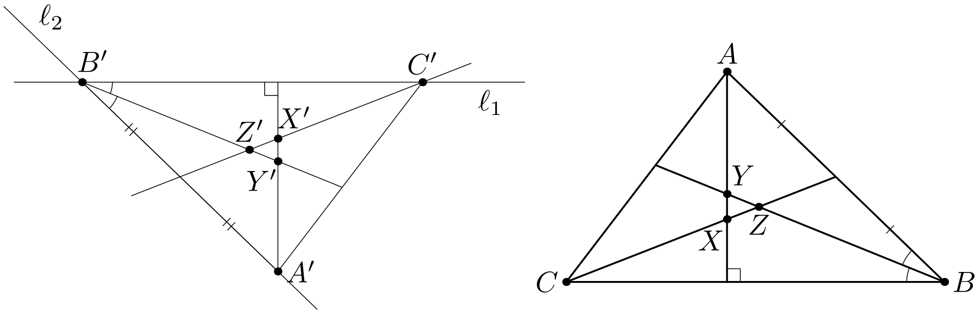

Рис. 10.5

Построим в этом треугольнике точки X', Y' и Z', соответствующие X, Y и Z соответственно. Из этих данных гомотетия однозначно восстанавливается, а после этого восстанавливается и исходный треугольник.

Замечание. Из решения видно, что задача имеет единственное решение, если точки X, Y и Z различны.

10.6 (*E. H. Garsia*) Вписанная окружность разностороннего треугольника ABC касается AB в точке C'. Окружность с диаметром BC' пересекает вписанную окружность вторично в точке A_1, а биссектрису угла B вторично в точке A_2. Окружность с диаметром AC' пересекает вписанную окружность вторично в точке B_1, а биссектрису угла A вторично в точке B_2. Докажите, что прямые AB, A_1B_1, A_2B_2 пересекаются в одной точке.

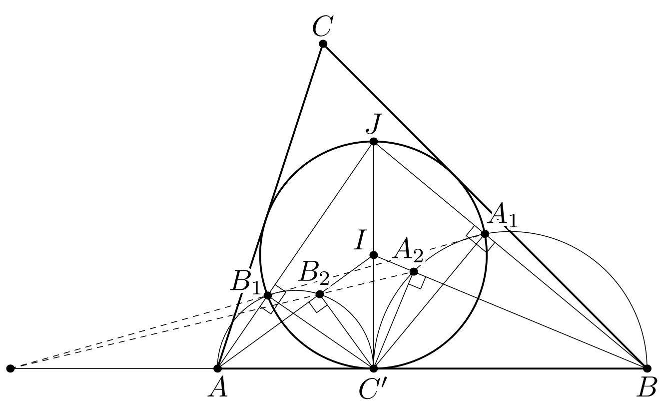

Рис. 10.6

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности ω, а J — её точка, диаметрально противоположная C' (см. рис. 10.6). Поскольку $\angle AB_1C' = \angle C'B_1J = \angle BA_1C' = \angle C'A_1J = 90^\circ$, точки A_1 и B_1 — это точки пересечения AJ и BJ с ω. Точки же A_2 и B_2 — это основания перпендикуляров из C' на BI и AI, соответственно.

Теперь из прямоугольных треугольников $AC'I$, $BC'I$, $AC'J$ и $BC'J$ с высотами $C'B_2$, $C'A_2$, $C'B_1$ и $C'A_1$ имеем
$$\frac{AB_1}{B_1J}\cdot\frac{JA_1}{A_1B}=\frac{AC'^2}{C'J^2}\cdot\frac{JC'^2}{C'B^2}=\frac{AC'^2}{4C'I^2}\cdot\frac{4IC'^2}{C'B^2}=\frac{AC'^2}{C'I^2}\cdot\frac{IC'^2}{C'B^2}=\frac{AB_2}{B_2I}\cdot\frac{IA_2}{A_2B}.$$
Согласно теореме Менелая, применённой к треугольникам AIB и AJB, это означает, что прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекают AB в одной точке (или обе параллельны ей).

10.7 (*С. Шлосман, О. Огиевецкий*) Докажите, что для любого тетраэдра его самый маленький двугранный угол (из шести) не больше, чем двугранный угол правильного тетраэдра.

Решение. Будем считать, что наибольшая из площадей граней тетраэдра равна 1; обозначим эту грань через $\mathcal{F}$. Пусть S_1, S_2 и S_3 — площади остальных трёх граней, а α_1, α_2 и α_3 — соответственно двугранные углы, образованные этими гранями с $\mathcal{F}$. Проектируя эти три грани на $\mathcal{F}$, получаем, что
$$S_1\cos\alpha_1+S_2\cos\alpha_2+S_3\cos\alpha_3=1.$$
Следовательно, одно из выражений вида $S_i\cos\alpha_i$ не меньше $\frac{1}{3}$, то есть
$$\cos\alpha_i\ge\frac{1}{3S_i}\ge\frac{1}{3}.$$

В правильном тетраэдре все три выражения равны, как и все четыре площади, так что в нём косинус двугранного угла равен $\frac{1}{3}$. Отсюда и следует требуемое.

10.8 (*Н.Белухов*) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Внутри треугольника BCD взяли точку L_a, расстояния от которой до сторон треугольника пропорциональны этим сторонам. Аналогично внутри треугольников ACD, ABD, ABC взяли точки L_b, L_c, и L_d соответственно. Оказалось, что четырехугольник $L_aL_bL_cL_d$ вписанный. Докажите, что у $ABCD$ есть две параллельные стороны.

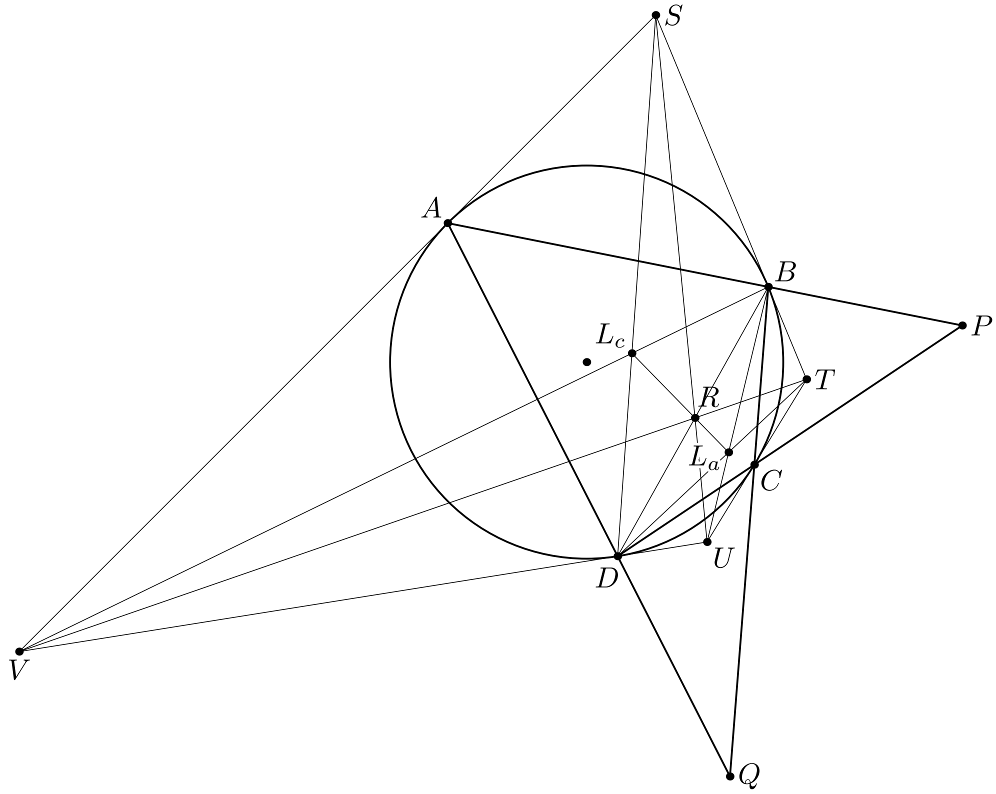

Рис. 10.8

Решение. Предположим, что четырехугольник $L_aL_bL_cL_d$ вписанный, но в четырехугольнике $ABCD$ нет параллельных сторон. Обозначим $P=AB\cap CD$, $Q=AD\cap BC$ и $R=AC\cap BD$ (см. рис. 10.8). Далее, пусть касательные к окружности в точках A, B, C и D образуют четырёхугольник $STUV$, как показано на рисунке; некоторые из точек S, T, U и V могут быть бесконечно удалёнными, но точки P, Q и R таковыми не являются.

По теореме Ньютона для описанного четырёхугольника $STUV$ имеем $R = SU \cap TV$. Далее, нетрудно понять, что точки L_a и L_c являются точками Лемуана треугольников BCD и BAD соответственно, поэтому $L_a = BU \cap DT$ и $L_c = BV \cap DS$. Применив теорему Паппа к шестиугольнику $BUSDTV$, получаем, что точка R лежит на прямой L_aL_c. Аналогично, точка R лежит на L_bL_d, то есть $R = L_aL_c \cap L_bL_d$.

Обозначим также $W = ST \cap UV$ и $X = SV \cap UT$ (эти точки могут быть бесконечно удалёнными). Точно так же, применяя теорему Паппа к шестиугольникам $ATVBXW$ и аналогичным, получаем, что $P = L_aL_b \cap L_cL_d$ и $Q = L_aL_d \cap L_bL_c$.

Так как вершины треугольника PQR являются точками пересечения диагоналей и противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, вершины этого треугольника являются полюсами его сторон относительно описанной окружности k четырехугольника $ABCD$ (такая окружность называется *автополярной окружностью* треугольника PQR). По тем же причинам, описанная окружность s четырехугольника $L_aL_bL_cL_d$ также является автополярной относительно PQR. Но для треугольника может существовать максимум одна автополярная окружность. Следовательно, $k \equiv s$, что невозможно, так как точки L_a, L_b, L_c и L_d лежит внутри k.

Замечание. Покажем, что автополярная окружность может быть только одна. Если ω автополярна для треугольника PQR, O — её центр, а r — её радиус, то $PO \perp QR$ и $QO \perp PR$, то есть O — ортоцентр треугольника PQR. Кроме того, $PO \cdot \rho(O, QR) = r^2$, откуда восстанавливается её радиус.

X Geometrical Olympiad in honour of I.F.Sharygin

Final round. Ratmino, 2014, July 31

Solutions

First day. 8 grade

8.1. (*J. Zajtseva, D. Shvetsov*) The incircle of a right-angled triangle ABC touches its catheti AC and BC at points B_1 and A_1, the hypotenuse touches the incircle at point C_1. Lines C_1A_1 and C_1B_1 meet CA and CB respectively at points B_0 and A_0. Prove that $AB_0 = BA_0$.

First solution. Consider an excircle with center I_A touching side AC at point B_2 and the extension of side BC at point A_0'. Since $I_AB_2CA_0'$ is a square, we have $I_AA_0' = B_2C$. It is known that $B_2C = AB_1$, thus $I_AA_0' = AB_1$. Then $A_0'B_1 \parallel I_AA$, but $I_AA \parallel B_1C_1$, therefore, A_0', B_1, C_1 are collinear and A_0' coincides with A_0, thus BA_0 as a tangent to the excircle is equal to the semiperimeter of ABC. Similarly we obtain that AB_0 is equal to the semiperimeter, therefore $AB_0 = BA_0$.

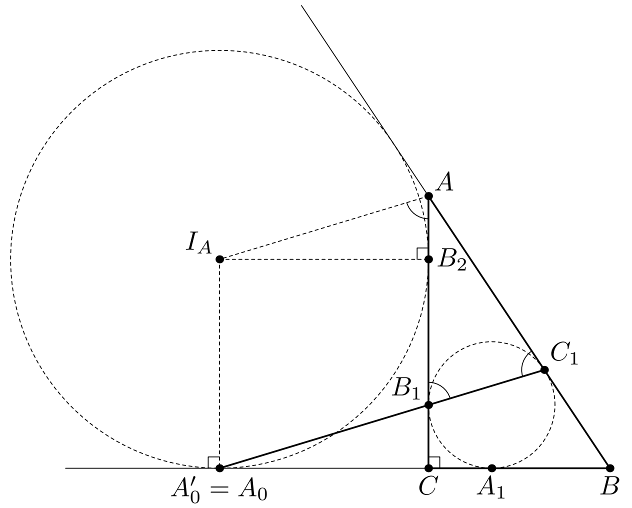

Fig. 8.1

Second solution. Since segments CA_1 and CB_1 are equal to the radius r of the incircle, and lines C_1A_1, C_1B_1 are perpendicular to the bisectors of angles B and A respectively, we obtain from right-angled triangles CA_0B_1 and CB_0A_1 that $A_0C = \dfrac{r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$, $B_0C = \dfrac{r}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$. On the other hand $AC = r + \dfrac{r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$, $BC = r + \dfrac{r}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$. Therefore $AB_0 = AC + CB_0 = BC + CA_0 = BA_0$.

8.2. (*B. Frenkin*) Let AH_a and BH_b be altitudes, AL_a and BL_b be angle bisectors of a triangle ABC. It is known that $H_aH_b \parallel L_aL_b$. Is it necessarily true that $AC = BC$?

Answer: yes.

First solution. Since triangles H_aH_bC and ABC are similar, triangles L_aL_bC and ABC are also similar, i.e $L_aC/AC = L_bC/BC$. Thus triangles AL_aC and BL_bC are similar. Thus, $\angle L_aBL_b = \angle L_bAL_a$, but these angles are equal to the halves of angles A and B. Therefore $AC = BC$.

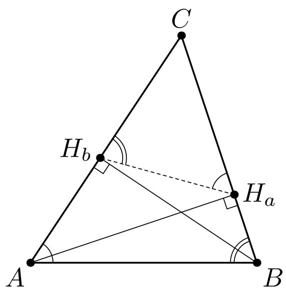

Fig. 8.2a

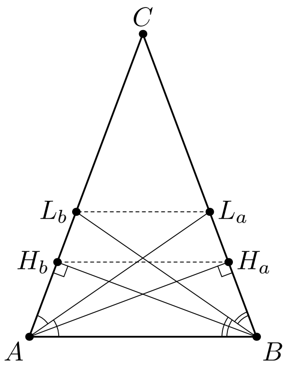

Fig. 8.2b

Second solution. Since H_aH_b and AB are antiparallel wrt AC and BC, L_aL_b and AB are also antiparallel wrt AC and BC, thus quadrilateral AL_bL_aB is cyclic. Then $\angle L_aBL_b = \angle L_bAL_a$ and $AC = BC$.

8.3. (*A. Blinkov*) Points M and N are the midpoints of sides AC and BC of a triangle ABC. It is known that $\angle MAN = 15°$ and $\angle BAN = 45°$. Find the value of angle ABM.

Answer: $75°$.

Solution. Let G be the centroid of ABC, F be the midpoint GB, and GFO be the regular triangle such that points O and A lie in the same semiplane wrt MB. Since $\angle MOB = 120°$, O is the circumcenter of triangle MAB, also we have $\angle MOG = 30° = 2\angle MAG$, therefore AG meet OG on the circumcircle of AMB, i.e. A, O, G are collinear. Then $75° = \angle MOA/2 = \angle ABN$.

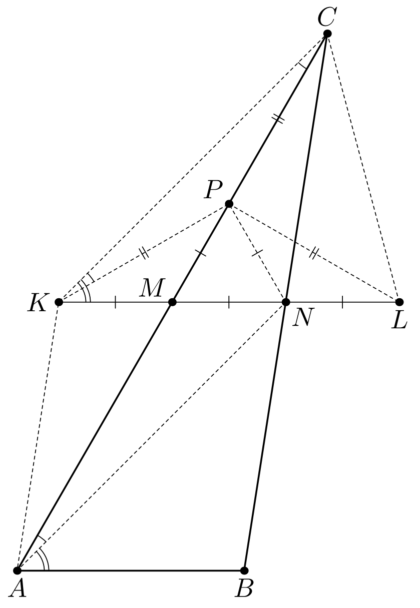

Fig. 8.3a

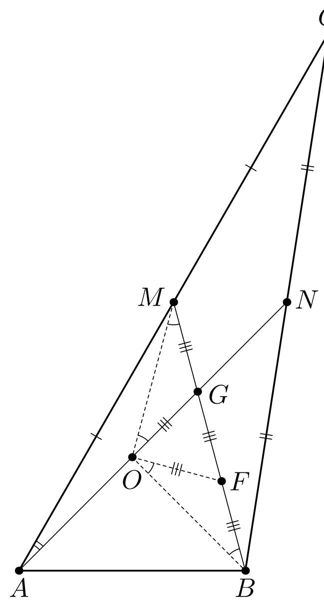

Fig. 8.3b

8.4. (*T. Kazitsyna*) Tanya has cut out a triangle from checkered paper as shown in the picture. The lines of the grid have faded. Can Tanya restore them without any instruments only folding the triangle (she remembers the triangle sidelengths)?

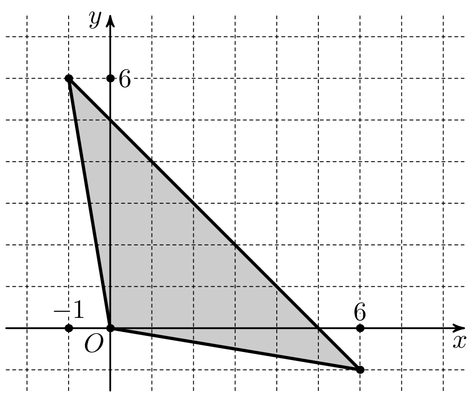

Fig. 8.4a

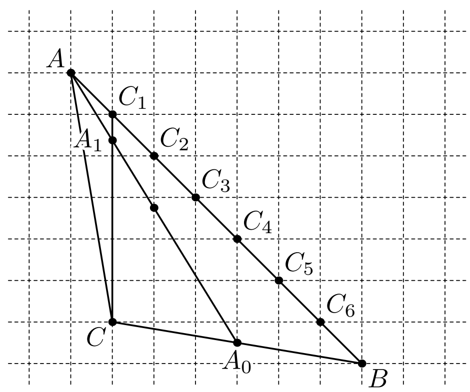

Fig. 8.4b

Solution. Let ABC be the given triangle ($AC = BC$). It is evident that we can find the midpoint of an arbitrary segment. Construct the median AA_0, and find on it such point A_1 that $AA_1 = AA_0/4$. By Thales theorem line CA_1 is the grid line intersecting AB at point C_1 such that $AC_1 = AB/7$ (fig.). Now constructing segments $C_1C_2 = C_2C_3 = \cdots = C_5C_6 = AC_1$, we find all nodes lying on AB. Folding the triangle by the line passing through C_2 in such way that C_3 be on CC_1, we restore the grid line passing through C_2, etc. The perpendicular lines can be restored similarly.

Solutions

Second day. 8 grade

8.5. (*A. Shapovalov*) A triangle with angles of 30, 70 and 80 degrees is given. Cut it by a straight line into two triangles in such a way that an angle bisector in one of these triangles and a median in the other one drawn from two endpoints of the cutting segment are parallel to each other. (It suffices to find one such cutting.)

Solution. Let in triangle ABC $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 80^\circ$. Take an altitude AH. Then $\angle CAH = \angle MHA = 10^\circ$, where M is the midpoint of AC. Also $\angle HAL = 10^\circ$, where L is the foot of the bisector of triangle HAB from vertex A. Therefore the median of triangle AHC from H and the bisector of triangle BAH from A are parallel, and AH is the desired cutting segment.

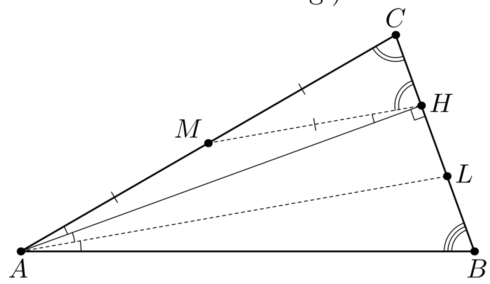

Fig. 8.5

8.6. (*V. Yasinsky*) Two circles k_1 and k_2 with centers O_1 and O_2 are tangent to each other externally at point O. Points X and Y on k_1 and k_2 respectively are such that rays O_1X and O_2Y are parallel and codirectional. Prove that two tangents from X to k_2 and two tangents from Y to k_1 touch the same circle passing through O.

Solution. Let S be the common point of XO_2 and YO_1. Let r_1 and r_2 be the radii of the corresponding circles. Then $\frac{XS}{SO_2} = \frac{O_1S}{SY} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1O}{OO_2}$. Thus $SO = \frac{r_1}{r_1+r_2}O_2Y = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$.

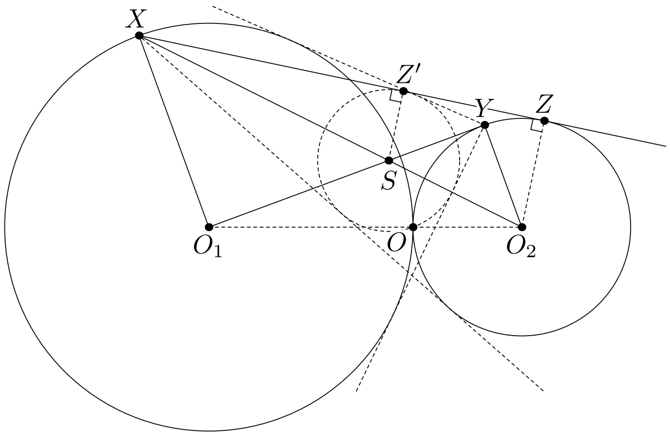

Fig. 8.6

Let XZ be a tangent from X to, and Z' be the projection of S to XZ. Then $SZ' = \frac{r_1}{r_1+r_2}O_2Z = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2} = SO$. Similarly the distance from S to three remaining tangents is equal to SO, i.e. S is the center of the sought circle.

8.7. (*Folklor*) Two points on a circle are joined by a broken line shorter than the diameter of the circle. Prove that there exists a diameter which does not intersect this broken line.

Solution. Let A and B be the endpoints of the broken line. Consider the diameter XY parallel to AB. Let C be the reflection of B in XY, then AC is a diameter of the circle. Consider an arbitrary point Z on XY. Since $AZ + BZ = AZ + CZ \geq AC$, Z can not lie on the broken line, therefore XY is the sought diameter.

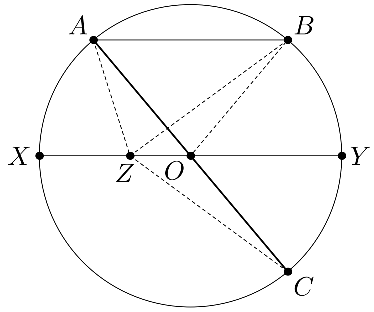

Fig. 8.7

8.8. (*Tran Quang Hung*) Let M be the midpoint of the chord AB of a circle centered at O. Point K is symmetric to M with respect to O, and point P is chosen arbitrarily on the circle. Let Q be the intersection of the line perpendicular to AB through A and the line perpendicular to PK through P. Let H be the projection of P onto AB. Prove that QB bisects PH.

First solution Let QA intersect the circle (O) at C which is distinct from A. Since BC is the diameter of the circle (O), we obtain that BC and MK bisect each other at the center of the circle, which implies that the quadrilateral $CKBM$ is a parallellogram. Furthermore, M is the midpoint of AB, then $CKMA$ is a rectangle since one of its angles is right. We shall prove that MQ is perpendicular to PC. We have

$$MC^2 - MP^2 - QC^2 + QP^2 = (CK^2 + MK^2) - (2PO^2 + 2OK^2 - PK^2) - (QK^2 - CK^2)+$$
$$+(QK^2 - PK^2) = 2CK^2 + 4OK^2 - 2PO^2 - 2OK^2 = 2CK^2 + 2OK^2 - 2OC^2 = 0.$$

Hence, MQ is perpendicular to PC. Let BP meet QA at R. Notice that CB is a diameter of (O), then BR is perpendicular to PC. Thus, it follows that MQ is parallel to BR. Q is the midpoint of AR, which follows from the fact that M is the midpoint of AB. Hence, QB bisects PH.

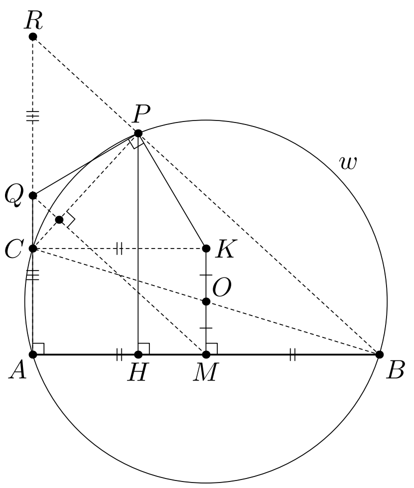

Fig. 8.8a

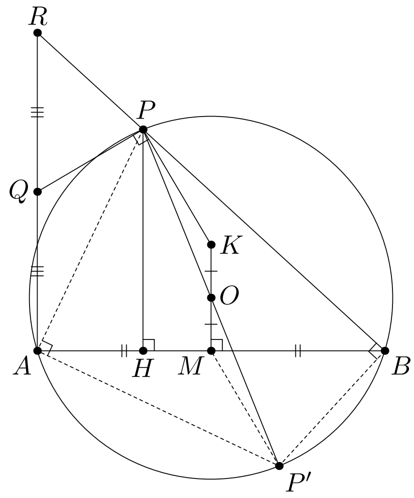

Fig. 8.8b

Second solution. Note that $\angle PBA \neq 90^\circ$; in the other case $PK \parallel AB$, and point Q doesn't exist. Then BP meets AQ at point R. Since triangles BPH and BRA are homothetic, we have to prove that Q is the midpoint of AR.

Let point P' be opposite to P. Then $PA \perp P'A$, $PR \perp P'B$, $AR \perp AB$, i.e. the correspondent sides of triangles $P'AB$ and PAR are perpendicular. Thus these triangles are similar and their medians from P and P' are also perpendicular. Using the symmetry wrt O we obtain that $P'M \parallel PK \perp PQ$. Therefore PQ is the median in $\triangle PAR$.

X Geometrical Olympiad in honour of I.F.Sharygin

Final round. Ratmino, 2014, July 31

Solutions

First day. 9 grade

9.1. (*V. Yasinsky*) Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral. Prove that $AC > BD$ if and only if

$$(AD - BC)(AB - CD) > 0.$$

First solution. Without loss of generality we can suppose that arcs ABC and BCD are not greater than a cemicircle. Then $\smile AD = 2\pi - \smile ABC - \smile BCD + \smile BC > \smile BC$. Since arc $ABCD$ is also greater than arc BC, we obtain that $AD > BC$.

Now if $AC > BD$, then $\smile ABC > \smile BCD$, $\smile AB > \smile CD$ and $AB > CD$. If $AC < BD$ all inequalities are opposite.

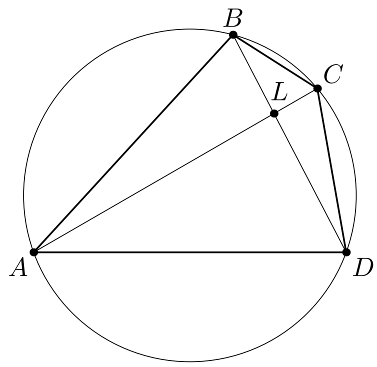

Fig. 9.1

Second solution. Let M, N be the midpoints of AC and BD, L be their common point, and O be the circumcenter. Let AL be the longest of segments AL, BL, CL, DL. Since $AL \cdot CL = BL \cdot DL$, CL is the shortest of these segments. Then $LM > LN$, $OM < ON$ and $AC > BD$. Also since triangles ALB and DLC are similar we obtain that $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AL}{DL}$, i.e $AB > CD$. By the same way using the similarity of triangles ALD and BLC we obtain $AD > BC$.

9.2. (*F. Nilov*) In a quadrilateral $ABCD$ angles A and C are right. Two circles with diameters AB and CD meet at points X and Y. Prove that line XY passes through the midpoint of AC.

Solution. Let M, N, K be the midpoints of AB, CD and AC respectively. Then the degree of point K wrt the circle with diameter AB is equal to $KM^2 - MA^2 = \dfrac{CB^2 - AB^2}{4}$, and its degree wrt the circle with diameter CD is equal to $\dfrac{AD^2 - CD^2}{4}$. Since $AB^2 + AD^2 = BD^2 = BC^2 + CD^2$, we obtain that these degrees are equal.

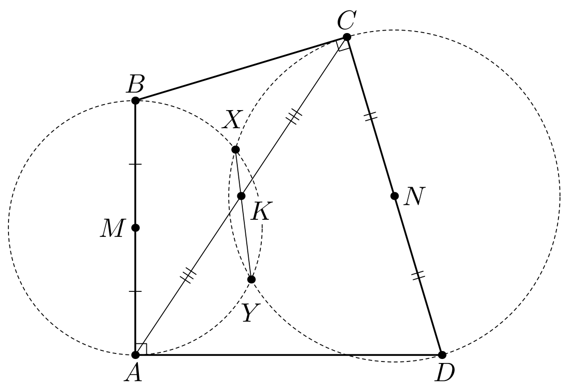

Fig. 9.2

9.3. (*E. Diomidov*) An acute angle A and a point E inside it are given. Construct points B, C on the sides of the angle such that E is the center of the Euler circle of triangle ABC.

First solution. Let l_1 and l_2 be the arms of $\angle A$ so that rotating l_1 about A to an angle $\alpha < 90^\circ$ maps it onto l_2. Rotate l_2 about E to an angle 2α and let its image meet l_1 at M_b and B be the reflection of A in M_a. The vertex C is constructed analogously.

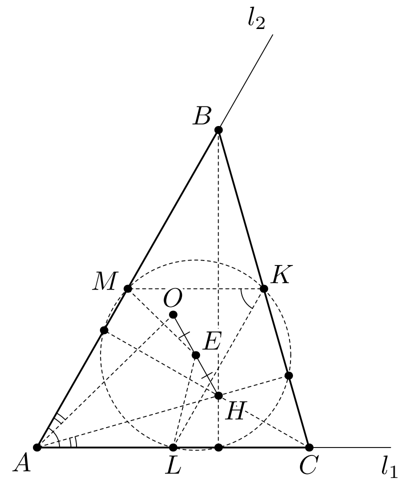

Fig. 9.3

Second solution. Let O and H be the circumcenter and the orthocenter of the sought triangle. Then E is the midpoint of OH, $\angle BAO = \angle HAC$ and $AH = 2AO\cos\angle A$. Therefore the composition of the reflection about the bisector of angle A, the homothety with center A and the coefficient equal to $2\cos\angle A$ and the reflection around E is a similarity with center O. Thus finding the center of this similarity we can construct B and C as the second common points of the arms of the given angle and the circle with center O, passing through A.

Note. If $\angle A = 60^\circ$ the considered similariry is the reflection about the line passing through E and perpendicular to the bisector of angle A. Thus we can take as O an arbitrary point of this line. In the other cases the solution is unique.

9.4. (*Mahdi ETtesami Fard*) Let H be the orthocenter of a triangle ABC. Given that H lies on the incircle of ABC , prove that three circles with centers A, B, C and radii AH, BH, CH have a common tangent.

First solution. Let H_a, H_b, H_c be the feet of the altitudes. Since $AH \cdot HH_a = BH \cdot HH_b = CH \cdot HH_c$, there exists an inversion about a circle with center H, transforming A, B, C to H_a, H_b, H_c respectively (if the triangle is acute-angled take a composition of the inversion and the reflection around H). This inversion transforms the sidelines of the triangle to the circles with diameters AH, BH, CH, and it transforms the incircle to the line touching these three circle. The homothety with center H and the coefficient 2 transforms this line to the sought one.

Second solution. Let I be the center of the incircle, A_1, B_1, C_1 be its touching points with BC, AC, AB respectively, and A_2, B_2, C_2 be such points on three circles that $\triangle A_1IH \sim \triangle HAA_2$, $\triangle B_1IH \sim \triangle HBB_2$ and $\triangle C_1IH \sim \triangle HCC_2$. The tangents to the circles in these points and the tangent to the incircle in H are parallel; prove that these three tangents coincide, i.e. the projections of vectors $\overrightarrow{HA_2}$, $\overrightarrow{HB_2}$ and $\overrightarrow{HC_2}$ to IH are equal. It is evident that they are codirectional. Since the angles formed by HA_2 with IH and IA_1 are equal, the first projection are equal to the projection of HA_2 to AH, i.e. $\frac{AH}{r} \cdot HH_a$. Find similarly the remaining projections and note that $AH \cdot HH_a = BH \cdot HH_b = CH \cdot HH_c$.

X Geometrical Olympiad in honour of I.F.Sharygin

Final round. Ratmino, 2014, August 1

Solutions

Second day. 9 grade

9.5. (*D. Shvetsov*) In triangle ABC $\angle B = 60^\circ$, O is the circumcenter, and L is the foot of an angle bisector of angle B. The circumcirle of triangle BOL meets the circumcircle of ABC at point $D \neq B$. Prove that $BD \perp AC$.

Solution. Let H be the orthocenter of ABC, and D' be the reflection of H in AC. Then D' lies on the circumcircle, and since $\angle B = 60^\circ$, we have $BO = BH$. Thus, since BL is the bisector of angle OBH, then $LO = LH = LD'$. Therefore $BOLD'$ is a cyclic quadrilateral, i.e. D' coincides with D.

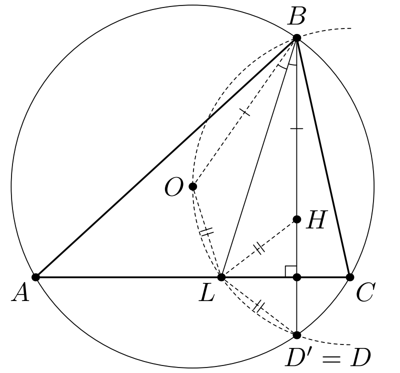

Fig. 9.5

9.6. (*A. Polyansky*) Let I be the incenter of triangle ABC, and M, N be the midpoints of arcs ABC and BAC of its circumcircle. Prove that points M, I, N are collinear if and only if $AC + BC = 3AB$.

First solution. Let A_1, B_1, C_1 be the midpoints of arcs BC, CA, AB of the circumcircle, not containing the other vertices of ABC. It is evident that MN and A_1B_1 are equal and parallel. Therefore they cut equal segments CC_2 and IC_1, where C_2 is the midpoint of CI, on the line CC_1, perpendicular to MN. Since C_1 is the circumcenter of triangle AIB we obtain that $C_2A_0 = C_2C = IC_1 = C_1A = C_1B$ (A_0 and B_0 are the touching points of the incircle with BC and CA respectively). Thus triangles C_2CA_0 and C_1AB are equal ($AB = CA_0$). From this $AC + CB = AB_0 + B_0C + CA_0 + A_0B = 2AB + AB_0 + A_0B = 3AB$. Similarly we obtain the opposite assertion.

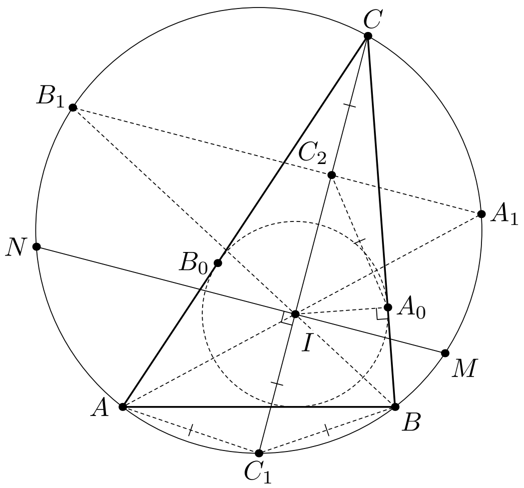

Fig. 9.6a

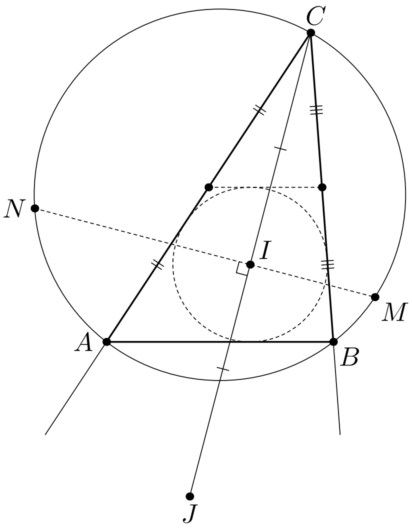

Fig. 9.6b

Second solution. Let J be the center of the excircle touching side AB. Then M and N are the centers of circles ACJ and BCJ, and therefore MN is the perpendicular bisector to segment CJ, i.e. I is the midpoint of CJ. Using the homothety with center C and the coefficient $1/2$ we obtain that the incircle touches the medial line parallel to AB. The trapezoid formed by this medial line and the sidelines of ABC is circumscribed if the sought equality is correct.

9.7. (*N. Beluhov*) Nine circles are drawn around an arbitrary triangle as in the figure. All circles tangent to the same side of the triangle have equal radii. Three lines are drawn, each one connecting one of the triangle's vertices to the center of one of the circles touching the opposite side, as in the figure. Show that the three lines are concurrent.

Solution. Introduce the following notation. Let r_a, r_b, r_c be the radii of the circles centered at O_a, O_b, O_c, respectively. Let $d_a(X)$ be the distance from X to BC, and define d_b and d_c analogously.

The figure composed of the lines CA and CB and the first three circles in the chain tangent to CA, counting from C, is similar to the figure composed of the lines CB and CA and the chain tangent to CB. Therefore, $d_a(O_b) : r_b = d_b(O_a) : r_a$. Analogous reasoning applies to the vertices A and B.

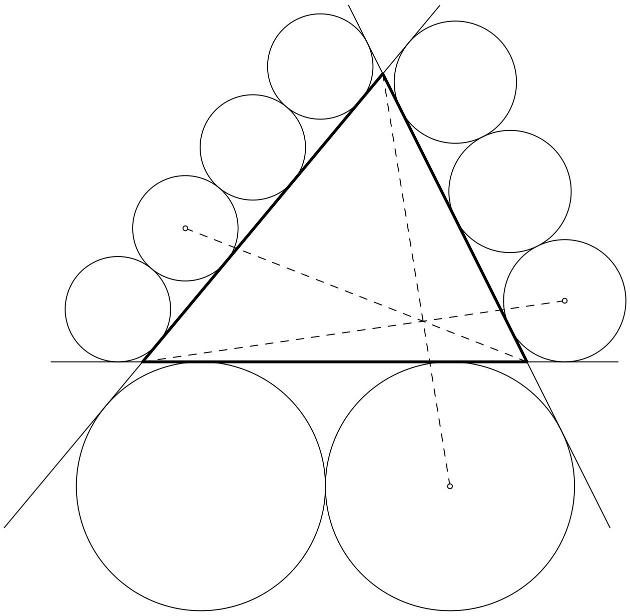

Fig. 9.7a

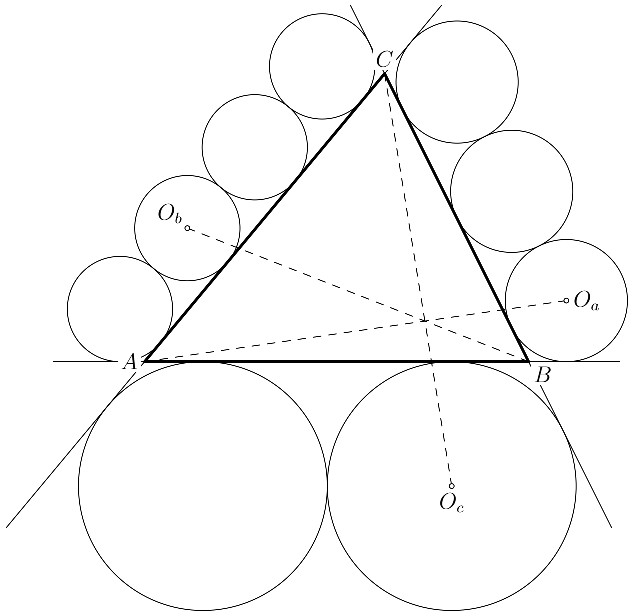

Fig. 9.7b

We have, therefore,

$$\frac{d_c(O_a)}{d_b(O_a)} \cdot \frac{d_a(O_b)}{d_c(O_b)} \cdot \frac{d_b(O_c)}{d_a(O_c)} = \frac{r_a}{r_c} \cdot \frac{r_c}{r_b} \cdot \frac{r_b}{r_a} = 1,$$

and the claim follows.

9.8. (*N. Beluhov, S. Gerdgikov*) A convex polygon P lies on a flat wooden table. You are allowed to drive some nails into the table. The nails must not go through P, but they may touch its boundary. We say that a set of nails blocks P if the nails make it impossible to move P without lifting it off the table. What is the minimum number of nails that suffices to block any convex polygon P?

Solution. If P is a parallelogram, then you need at least four nails to block it. Indeed, if there is a side s of P such that no nail touches the interior of s, then you can slide P in the direction determined by the two sides adjacent to s.

Now let P be an arbitrary convex polygon. We will show that four nails suffice to block P.

A set of nails blocks P if and only if, for every sufficiently small movement f (i.e., for every translation to a sufficiently small distance and every rotation to a sufficiently small angle), the interior of the image $f(P)$ of P covers some nail.

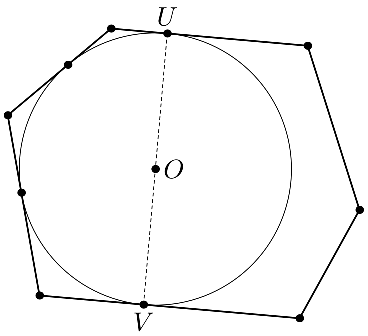

Fig. 9.8a

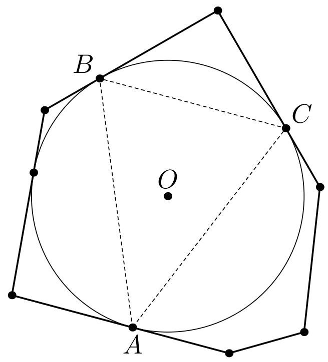

Fig. 9.8b

Let the circle c of center O be one of the largest circles contained within P. Let A_1, A_2, ... A_k be the points at which c touches P's boundary, and let H be their convex hull.

Suppose that there are two vertices U and V of H such that UV is a diameter of c. Place two nails at U and V. It is easy to see that, since the sides of P that contain U and V are parallel, the only movements still permitted to P are the translations in a direction perpendicular to UV. (Indeed, all other directions of translation would cause P to cover either U or V when the translation distance is small enough; all clockwise rotations whose center lies to the left of the ray $\overrightarrow{UV}$ would cause P to cover V when the rotation angle is small enough; all clockwise rotations whose center lies to the right of $\overrightarrow{UV}$ would cause P to cover U when the rotation angle is small enough; and so on.) A third nail prevents P from sliding to the left of $\overrightarrow{UV}$, and a fourth one prevents it from sliding to the right.

We are left to consider the case when no side or diagonal of H contains O.

Suppose that $O \notin H$. Let PQ be that side of H which separates H and O and let the tangents to c at P and Q meet in T. Then a homothety of center T and ratio larger than and sufficiently close to one maps c onto a larger circle contained within P: a contradiction.

Therefore, $O \in H$. Consider an arbitrary triangulation π of H and let ABC be that triangle in π which contains O. (A, B, and C being three of the contact points of H with the boundary of P.)

Since no side or diagonal of H contains O, O lies in the interior of $\triangle ABC$. It is easy to see, then — as above — that three nails placed at A, B, and C block P.

X Geometrical Olympiad in honour of I.F.Sharygin

Final round. Ratmino, 2014, July 31

Solutions

First day. 10 grade

10.1. (*I. Bogdanov, B. Frenkin*) The vertices and the circumcenter of an isosceles triangle lie on four different sides of a square. Find the angles of this triangle.

Answer. $15°$, $15°$ and $150°$.

Solution. Let the circumcenter O of triangle XYZ lie on side AB, and its vertices X, Y, Z lie on sides BC, CD, DA of square $ABCD$. Since segment OY intersect segment XZ, angle XYZ is obtuse, thus XZ is the base of the triangle. Then $OY \perp XZ$; since segments OY and XZ are perpendicular and their projections to perpendicular lines BC and AB respectively are equal, we obtain that these segments are also equal, i.e. the side of the triangle is equal to its circumradius. Since angle XYZ is obtuse, we obtain that $\angle XYZ = 150°$, then two remaining angles are equal to $15°$.

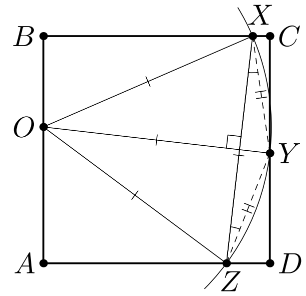

Fig. 10.1

10.2. (*A. Zertsalov, D. Skrobot*) A circle, its chord AB and the midpoint W of the minor arc AB are given. Take an arbitrary point C on the major arc AB. The tangent to the circle at C meets the tangents at A and B at points X and Y respectively. Lines WX and WY meet AB at points N and M respectively. Prove that the length of segment NM does not depend on point C.

First solution. Let T be the common point of AB and CW. Then AT and AC are antiparallel wrt angle AWC. Since WX is the symedian of triangle CAW, it is the median of triangle ATW, Thus N is the midpoint of AT. Similarly M is the midpoint of BT, i.e. $MN = AB/2$.

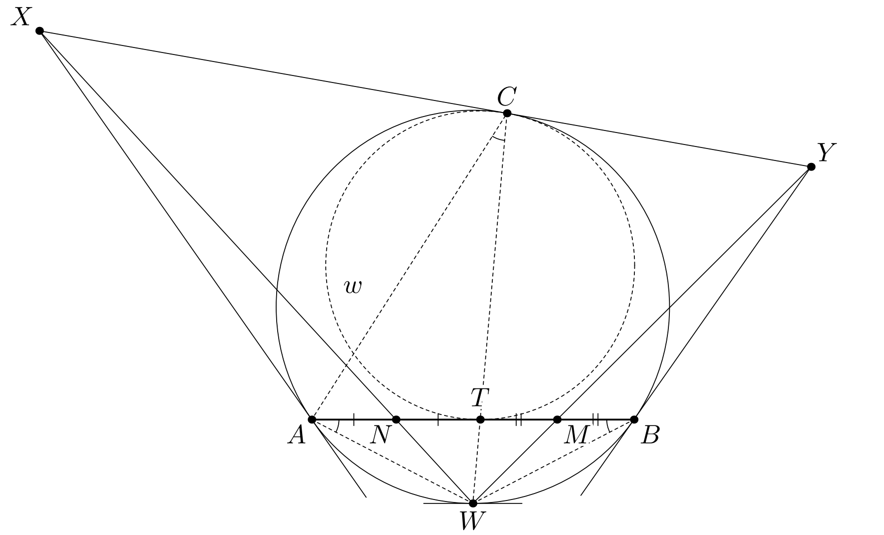

Рис. 10.2

Second solution. Consider circle w, touching XY at C and touching AB (at point T). It is easy to see that WX is the radical axis of A and w, i.e. it passes through the midpoint N of segment AT, Similarly WY passes through the midpoint M of segment ZB. Thus $MN = AB/2$.

10.3. (*A. Blinkov*) Do there exist convex polyhedra with an arbitrary number of diagonals (a *diagonal* is a segment joining two vertices of a polyhedron and not lying on the surface of this polyhedron)?

Answer. Yes.

Solution. Let $SA_1 \dots A_{n+2}$ be a $(n+2)$-gon pyramid and $TSA_{n+1}An + 2$ be a pyramid with base $SA_{n+1}An + 2$ and sufficiently small altitude. Then the diagonals of polyhedron $TSA_1 \dots A_{n+2}$ are segments $TA_1, \dots, TA_n$.

10.4. (*A. Garkavyj, A. Sokolov*) Let ABC be a fixed triangle in the plane. Let D be an arbitrary point in the plane. The circle with center D, passing through A, meets AB and AC again at points A_b and A_c respectively. Points B_a, B_c, C_a and C_b are defined similarly. A point D is called *good* if the points A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, and C_b are concyclic. For a given triangle ABC, how many good points can there be?

Answer. 4.

Solution. It is evident that the circumcenter O satisfies the condition. Now let D does not coincide with O. Let A', B', C' be the projections of D to BC, CA, AB respectively. Then the midpoints of segments AB and A_bB_a are symmetric wrt C', therefore the perpendicular bisector to A_bB_a passes through point O', symmetric to O wrt D. The perpendicular bisectors to A_cC_a and B_cC_b also pass through O', thus O' is the center of the circle passing through six points.

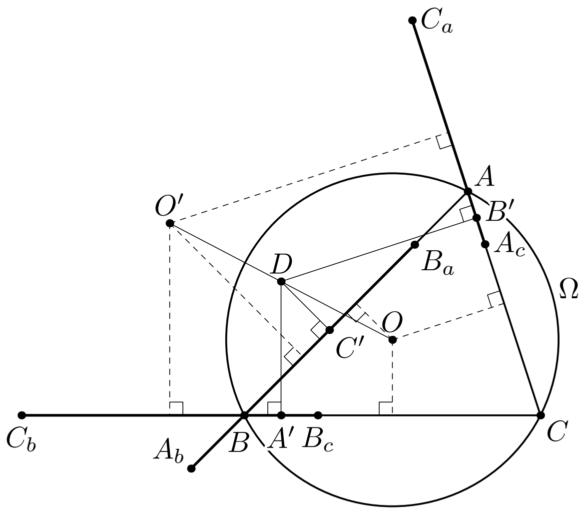

Fig. 10.4a

Since points D and O' are on equal distances from A_b and A_c, line DO' is the perpendicular bisector to A_bA_c. But $A_bA_c \parallel B'C'$, therefore $DO' \perp B'C'$. Similarly $DO' \perp A'B'$, i.e. points A', B', C' are collinear. Thus, D lies on the circumcircle of ABC and its Simson line $A'B'C'$ is perpendicular to radius OD. When D moves on the circle its Simson line rotates in the opposite direction with twice as smaller velocity, therefore there exists exactly three points with such property (these points form a regular triangle).

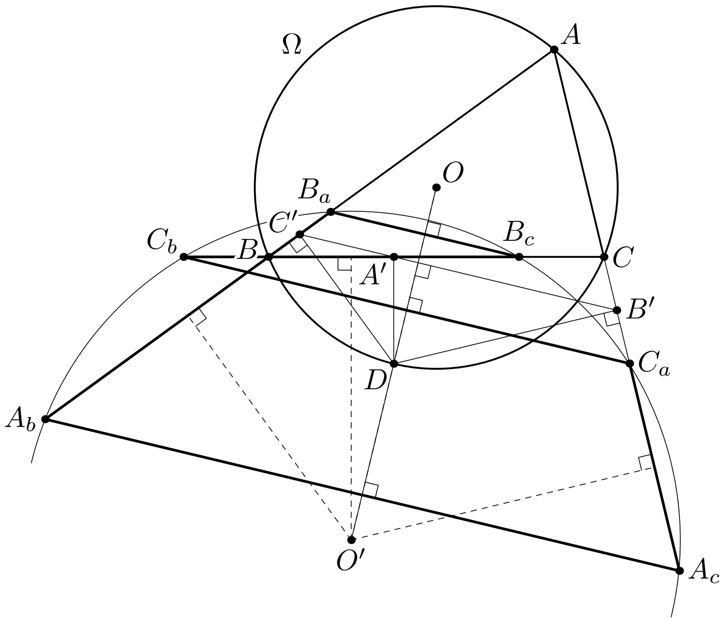

Fig. 10.4b

X Geometrical Olympiad in honour of I.F.Sharygin

Final round. Ratmino, 2014, August 1

Solutions

Second day. 10 grade

10.5. (*A. Zaslavsky*) The altitude from one vertex of a triangle, the bisector from the another one and the median from the remaining vertex were drawn, the common points of these three lines were marked, and after this everything was erased except three marked points. Restore the triangle. (For every two erased segments, it is known which of the three points was their intersection point.)

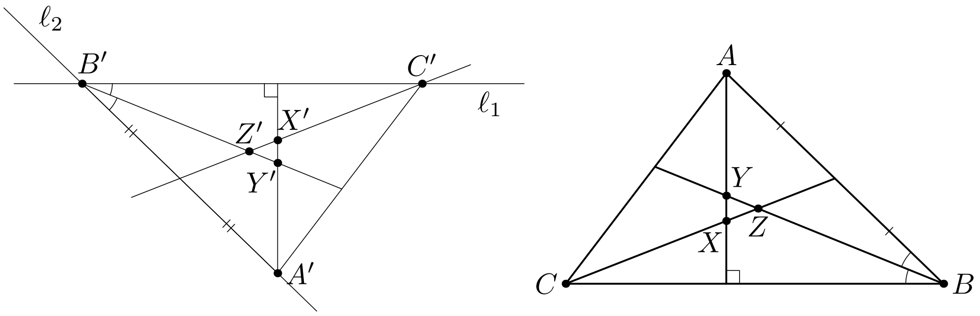

Fig. 10.5

Solution. Let X, Y, Z be the marked points. Then we have to find points A, B, C on lines XY, YZ, ZX respectively such that XY, YZ, ZX be the altitude, the bisector and the median of triangle ABC. From an arbitrary point B' draw a ray l_1 perpendicular to XY, and such ray l_2, that the bisector of the angle formed by these rays be parallel to YZ. Take an arbitrary point A' on l_2 and draw through the midpoint of $A'B'$ the line parallel to ZX meeting l_1 at point C'. Triangle $A'B'C'$ is homothetic to the desired one. Constructing the points corresponding to X, Y, Z, find the center and the coefficient of the homothety.

10.6. (*E. H. Garsia*) The incircle of a non-isosceles triangle ABC touches AB at point C'. The circle with diameter BC' meets the incircle and the bisector of angle B again at points A_1 and A_2 respectively. The circle with diameter AC' meets the incircle and the bisector of angle A again at points B_1 and B_2 respectively. Prove that lines AB, A_1B_1, A_2B_2 concur.

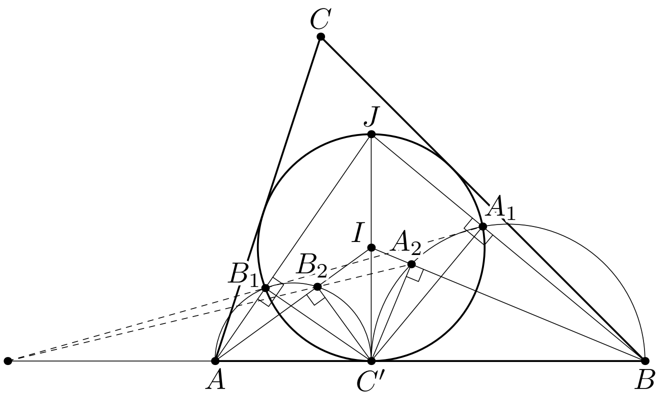

Fig. 10.6

Solution. Let I be the center of the incircle, and J be its point opposite to C'. Then A_1 and B_1 are the common points of AJ, BJ with the incircle (because $\angle AB_1C' = \angle C'B_1J = \angle BA_1C' = \angle C'A_1J = 90^\circ$). From right-angled triangles $AC'I$, $BC'I$, $AC'J$ and $BC'J$ with altitudes $C'B_2$, $C'A_2$, $C'B_1$ and $C'A_1$ we obtain

$$\frac{AB_2}{B_2I}\cdot\frac{IA_2}{A_2B} = \frac{AC'^2}{C'I^2}\cdot\frac{IC'^2}{C'B^2} = \frac{AC'^2}{C'J^2}\cdot\frac{JC'^2}{C'B^2} = \frac{AB_1}{B_1J}\cdot\frac{JA_1}{A_1B},$$

i.e. by Menelaos theorem A_1B_1 and A_2B_2 meet AB at the same point.

10.7. (*S. Shosman, O. Ogievetsky*) Prove that the smallest dihedral angle between faces of an arbitrary tetrahedron is not greater than the dihedral angle between faces of a regular tetrahedron.

Solution. Let the greatest area of the faces of the tetrahedron is equal to 1. Let S_1, S_2, S_3 be the areas of the remaining faces, and α_1, α_2, α_3 be the angles between these faces and the greatest face. Then $S_1\cos\alpha_1 + S_2\cos\alpha_2 + S_3\cos\alpha_3 = 1$ and, therefore, one of angles α_1, α_2, α_3 is not greater than $\arccos\frac{1}{3}$.

10.8. (*N. Beluhov*) Given is a cyclic quadrilateral $ABCD$. The point L_a lies in the interior of $\triangle BCD$ and is such that its distances to the sides of this triangle are proportional to the lengths of corresponding sides. The points L_b, L_c, and L_d are defined analogously. Given that the quadrilateral $L_aL_bL_cL_d$ is cyclic, prove that the quadrilateral $ABCD$ has two parallel sides.

Solution. If $ABCD$ is an isosceles trapezoid, then so is $L_aL_bL_cL_d$.

Suppose, then, that $L_aL_bL_cL_d$ is cyclic and that $ABCD$ has no parallel sides. Let $P = AB \cap CD$, $Q = AD \cap BC$, and $R = AC \cap BD$. Furthermore, let the tangents at A and B to the circumcircle of $ABCD$ meet in S, those at B and C meet in T, those at C and D – in U, and those at D and A – in V.

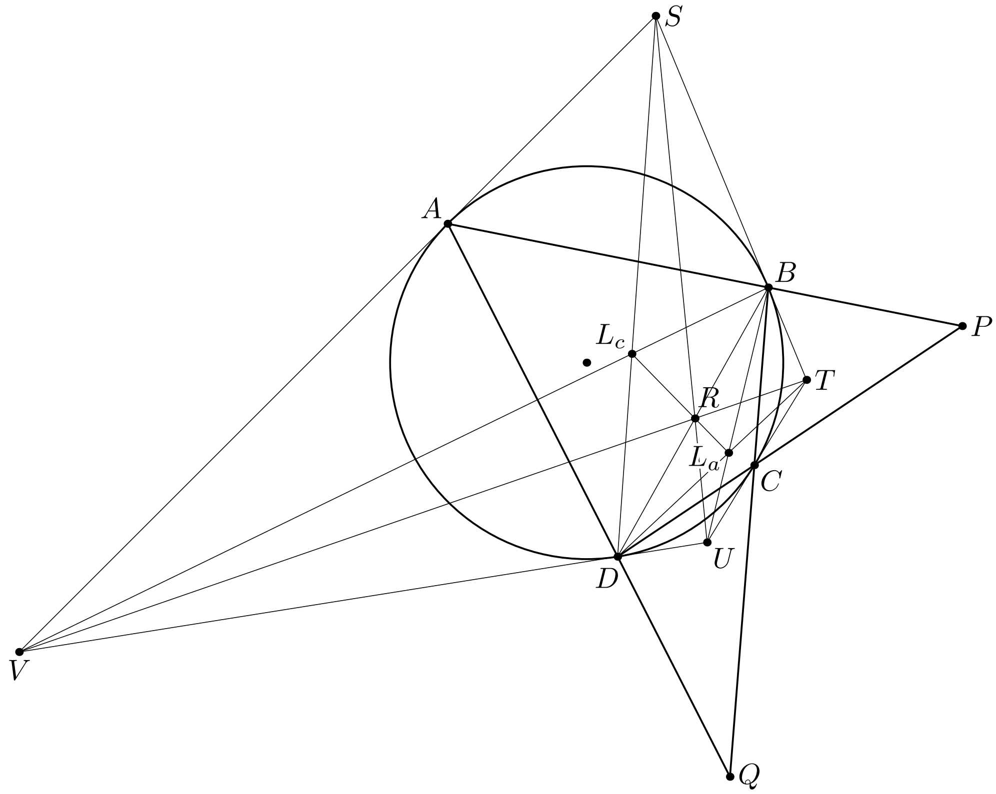

Fig. 10.8

It is well-known that $R = SU \cap TV$ and that $L_a = BU \cap DT$ and $L_c = BV \cap DS$. By Pappus's theorem for the hexagon $BUSDTV$, we see that R lies on L_aL_c. Similarly, R lies on L_bL_d and, therefore, $R = L_aL_c \cap L_bL_d$. Analogously, $P = L_aL_b \cap L_cL_d$ and $Q = L_aL_d \cap L_bL_c$.

Since the vertices of $\triangle PQR$ are the intersections of the diagonals and opposite sides of $ABCD$, the circumcircle k of $ABCD$ has the property that the polar of any vertex of $\triangle PQR$ with respect to k is the side opposite to that vertex. Analogously, the circumcircle s of $L_aL_bL_cL_d$ has the same property. Given $\triangle PQR$, however, there is exactly one such circle. It follows that $k \equiv s$, and this is a contradiction because $L_aL_bL_cL_d$ lies in the interior of $ABCD$.