Многочлены. Разные задачи. Задание 7.

Задача 1. Найти все натуральные n, для которых существует многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, такой, что $P(x^2+x+1)$ делится на $P(x)$.

Задача 2. Пусть $P(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ и $P(\cos\alpha, \sin\alpha) = 0$ для всех действительных α. Доказать, что $P(x,y) = (x^2+y^2-1)Q(x,y)$ для некоторого многочлена $Q(x,y)$ с действительными коэффициентами.

Задача 3. Задано натуральное n. Найти наибольшую возможную длину интервала (α,β), такого, что для произвольных $a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1} \in (\alpha,\beta)$ многочлен $x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ не имеет действительных корней.

Задача 4. Пусть $m, n > 2$. Найти количество многочленов степени $(2n-1)$ с попарно различными коэффициентами из множества $\{1, 2, \ldots, m\}$, которые делятся на многочлен $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$.

Задача 5. Пусть x, y, z, t действительны и $x+y+z+t = x^7+y^7+z^7+t^7 = 0$. Доказать, что $(t+x)(t+y)(t+z) = 0$. Верно ли будет утверждение, если числа комплексные? Какие числа можно поставить вместо 7?

Задача 6. Найти количество коэффициентов многочлена $P(x) = (1+x)^n$, которые не делятся на 3.

Задача 7. Пусть P, Q, R многочлены с действительными коэффициентами и $P^4+Q^4 = R^2$. Докажите, что существует многочлен S с действительными коэффициентами и действительные p, q, r, для которых $P(x) = pS(x)$, $Q(x) = qS(x)$, $R(x) = rS(x)$.

Задача 8. Найти количество нечётных коэффициентов многочлена $P(x) = (1+x+x^2)^n$.

Задача 9. Многочлен $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет n действительных корней, $a_n \neq 0$, $n \geqslant 3$. Известно, что $a_{n-2} = 0$, $a_{n-1}/a_n > n$. Докажите, что хотя бы один корень этого многочлена лежит в $(-1/2, 0)$.

Задача 10. Пусть $P(x) = x^4 - 18x^3 + ax^2 + 200x - 1984$. Какие значения может принимать параметр a, если у многочлена $P(x)$ есть 2 действительных корня, произведение которых равно (-32).

Задача 11. Целые неотрицательные числа $b_1, b_2, \ldots, b_{32}$ таковы, что $(1-x)^{b_1}(1-x^2)^{b_2}\ldots(1-x^{32})^{b_{32}} = 1 - 2x + x^{33}P(x)$ для некоторого многочлена $P(x)$. Найти b_{32}.

Задача 12. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_M$ такова, что для всех n, $1 \leqslant n \leqslant M-2$ квадратный трёхчлен $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$ имеет действительный корень. Может ли количество членов этой последовательности равнятся 1000? Может ли такая последовательность быть бесконечной (т.е. $a_1, a_2, \ldots$)?