Пряма та коло Ейлера

Літній математичний табір "Контора π"
Молодша група

Задача 1. *Нехай ABC гострокутний трикутник, M_1, M_2, M_3 — середини сторін BC, CA, AB, AH_1, BH_2, CH_3 — висоти ABC, E_1, E_2, E_3 — середини відрізків AH, BH, CH відповідно, H — ортоцентр, O — центр описаного кола трикутника ABC. Наша мета — гарно зрозуміти що таке пряма і коло Ейлера і чому все саме так, як є. Окремі важливі пункти позначені (!).*

1. *(!) Довести, що $\angle BAH = \angle CAO$.*
2. *Нехай D — діаметрально протилежна точка до точки A на описаному колі ABC. Тоді $BHCD$ — паралелограм.*
3. *(!) Вивести з попереднього те, що $AH = 2OM_1$.*
4. *(!) Довести, що точки H, M, O лежать на одній прямій, причому $2MO = HM$ (**пряма Ейлера**).*
5. *Згадати, що медіана до гіпотенузи в прямокутному трикутнику рівна половині гіпотенузи.*
6. *Довести, що точки M_1, M_2, M_3, H_1 лежать на одному колі.*
7. *Довести, що $\angle H_2H_1H_3 = 180° - 2\angle A$.*
8. *Зрозуміти, що E_1 — центр описаного кола чотирикутника AH_2HH_3. Довести, що точки H_1, H_2, H_3 і E_1 лежать на одному колі.*
9. *(!) Зрозуміти, що точки M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3, E_1, E_2, E_3 лежать на одному колі (**коло Ейлера або коло дев'яти точок**)*
10. *(!) Довести, що чотирикутник AE_1M_1O — паралелограм. Чому $R = 2r_9$, де R — радіус описаного кола ABC, r_9 — радіус кола Ейлера?*
11. *(!) Нехай O_9 — центр кола Ейлера. Довести, що O_9 належить прямій Ейлера, причому $HO_9 = O_9O$.*

Задача 2. *Довести, що O_9 ділить навпіл відрізок H_2H_3, якщо $\angle A = 45°$.*

Хілько Данило
dkhilko@ukr.net