Міністерство освіти і науки України
Інститут інноваційних технологій та змісту освіти

L Всеукраїнська олімпіада 2009-2010 років
Умови та розв'язки по усіх класах

Перший день

8 клас

1. (**Ясінський В'ячеслав**) При яких натуральних n значення кожного з виразів $n^2-10n+23$, $n^2-9n+31$ і $n^2-12n+46$ є простим числом.

   Відповідь: $n=3$, $n=7$.

   Розв'язання. Нехай n таке натуральне число, що задовольняє умову задачі. Знайдемо суму усіх чисел: $3n^2-31n+100=2n^2-30n+n(n-1)+100$ – парне число. Це означає, що усі ці три числа не можуть бути непарними. Тому хоча б одне із них буде парним, тобто дорівнює 2. Розв'язавши кожне з трьох рівнянь:

   $$n^2-10n+23=2, n^2-9n+31=2, n^2-12n+46=2,$$

   ми знаходимо, що $n=3$ або $n=7$. Залишилося перевірити ці значення.

   При $n=3$ маємо: $n^2-10n+23=2$, $n^2-9n+31=13$ та $n^2-12n+46=19$.

   При $n=7$ маємо: $n^2-10n+23=2$, $n^2-9n+31=17$ та $n^2-12n+46=11$.

   Як бачимо усі одержані значення – прості. Отже, умова задачі виконується лише для $n=3$, $n=7$.

2. (**Рубльов Богдан**) В рядок записали $n\geq 5$ дійсних чисел. З'ясувалось, що сума будь-яких трьох записаних поспіль чисел – додатне число, а сума будь-яких 5 записаних поспіль чисел є від'ємним числом. При якому найбільшому значенні n це можливо?

   Відповідь: $n=6$.

   Розв'язання. Наведемо відповідний приклад для $n=6$: $3,-5,3,3,-5,3$.

   Припустимо, що існують вказані числа для деякого $n\geq 7$, виберемо довільні 5 чисел a,b,c,d,e, які стоять поруч. Оскільки за умовою $a+b+c>0$, $c+d+e>0 \Rightarrow (a+b+c+d+e)+c>0$, а також $a+b+c+d+e<0$. Звідси очевидно, що $c>0$, тому серед 5 чисел, які стоять поруч середнє завжди повинно бути додатним. За таких умов усі числа окрім 2 крайніх з кожного краю є середніми у деякій п'ятірці, тому вони усі повинні бути додатними.

   Тепер розглянемо 6 поруч записаних чисел: a,b,c,d,e,f. Тоді за умовою $a+b+c+d+e<0$, а $(a+b+c)+(d+e+f)>0$. Таким чином $f>0$, аналогічно $a>0$, тобто крайні числа у кожній шістці повинні також бути додатними. Остаточно маємо, що усі n чисел повинні бути додатними. Що очевидно, умову задачі не задовольняє. Одержана суперечність завершує доведення.

3. (**Білокопитов Євген**) Точка P належить трикутнику ABC. Центри описаних кіл трикутників PBC, PAC, PAB позначимо через O_A, O_B, O_C відповідно. Позначимо через O_P – центр описаного кола трикутника $O_AO_BO_C$. Доведіть, що точка P задовольняє умову $O_P=P$ тоді і тільки тоді, коли P – ортоцентр $\triangle ABC$.

Розв'язання. Нехай $A' = PA \cap O_BO_C, B' = PB \cap O_AO_C, C' = PC \cap O_BO_A$, O_AO_C є серединним перпендикуляром до BP, тому містить точку B' – середину відрізку BP. Аналогічно, A', C' є серединами PA, PC (рис.1). Якщо P є центром описанного кола $\triangle O_AO_BO_C$ то перпендикуляр, опущений з P на O_AO_C є серединним, отже B', як основа цього перпендикуляру є також серединою O_AO_C. Аналогічно, в цьому випадку, A', C' є серединами O_BO_C, O_AO_B. При цьому $PB \perp O_AO_C \parallel A'C' \parallel AC$, бо $A'C'$ є середньою лінією трикутників $O_AO_BO_C$ та APC. Аналогічно $PA \perp BC$, $PC \perp AB$, отже P – ортоцентр $\triangle ABC$. Очевидно також, що якщо P – ортоцентр, то $O_P = P$.

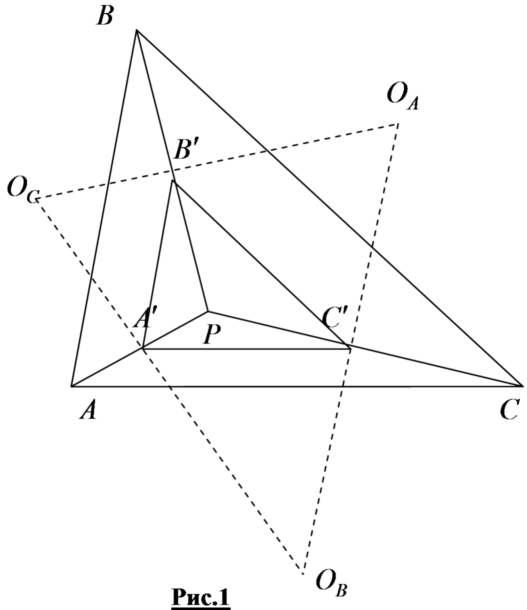

Рис.1

4. (**Гоголєв Андрій**) Розв'яжіть в натуральних числах n, k рівняння:

$$(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1.$$

Відповідь: $n = k = 3$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $2n^k + 3n = (n+1)^n - 1$. Розкладемо праву частину на множники і отримаємо:

$$2n^k + 3n = (n+1)^n - 1 = (n+1-1)\left((n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \ldots + (n+1) + 1\right).$$

Права частина ділиться на n^2 оскільки перший множник дорівнює n, а другий має n доданків, кожний з яких дає остачу 1 при діленні на n, тобто також ділиться на n. Отже $\left(2n^{k-1} + 3\right) \vdots\, n$. Можливі два випадки.

1) $k = 1$, тому $5 \vdots\, n$, тому треба розглянути випадки $n = 1$ та $n = 5$. При $n = 1$ маємо $2 = 6$ – суперечність. При $n = 5$ маємо $6^5 = 31$ – також суперечність.

2) $k > 1$, тоді повинна виконуватись умова $3 \vdots\, n$. Знову треба розглянути два випадки $n = 1$ та $n = 3$. При $n = 1$ маємо $2 = 6$ – суперечність. При $n = 3$ маємо $64 = 2 \cdot 3^k + 10$, звідки знаходимо, що $k = 3$.

Таким чином знаходимо розв'язок $n = k = 3$.

9 клас

1. (**Рубльов Богдан**) Числа $a_1 = 1, a_2 = 1 - \frac{1}{2}, a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, a_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots,$ $a_{2009} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2009}, a_{2010} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2010}$ записали у порядку зростання.

З'ясуйте яке число у цій розстановці записане:

а) на 1000-му місці;
б) на 2000-му місці?

Відповідь: ***а)*** a_{2000}; ***б)*** a_{21}?

Розв'язання. Неважко побачити, що кожне наступне число потрапляє проміж двома попередніми числами (рис.2).

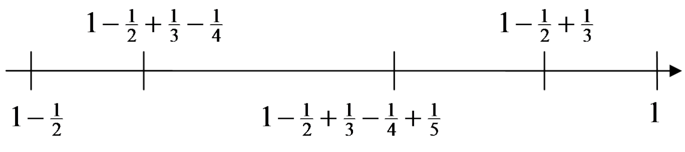

Рис.2

Зрозуміло, що виконуються такі нерівності: для парного $n = 2k$:

$$a_{2k-2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2k-2} < a_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} <$$

$$< a_{2k-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2k-1},$$

для непарного $n = 2k+1$:

$$a_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2k} < a_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} <$$

$$< a_{2k-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2k-1}.$$

Тому усі числа будуть йти таким чином у порядку зростання:

$$a_2, a_4, \ldots, a_{2010}, a_{2009}, a_{2007}, \ldots, a_3, a_1.$$

Тепер вже неважко з'ясувати, що на 1000-му місці стоїть a_{2000}, а на 2000-му місці стоїть a_{21}.

2. (**Петровський Дмитро**) Нехай $P(x), Q(x)$ та $R(x)$ – многочлени, при цьому $Q(x)$ та $R(x)$ набувають лише невід'ємних значень. Відомо, що рівняння

$$P(x) + \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(x) + \sqrt{R(x)}} = 0$$

має нескінченно багато коренів. Чи випливає звідси, що будь-яке дійсне число є коренем данного рівняння?

Відповідь: Не обов'язково.

Розв'язання. Покажемо, що це не так, для чого наведемо відповідний приклад. $P(x) = x$, $Q(x) = \frac{1}{4}x^2$, $\sqrt{Q(x)} = \frac{1}{2}|x|$, $R(x) = 0$. Тоді $\sqrt{Q(x) + \sqrt{R(x)}} = \frac{1}{2}|x|$ і маємо: $P(x) + \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(x) + \sqrt{R(x)}} = x + |x| = \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ Таким чином ліва частина не дорівнює тотожньо нулеві, але рівняння має нескінченну кількість розв'язків.

Зауважимо, що це не єдиний приклад, можна вибрати $Q(x) = \frac{1}{8}x^2$, $R(x) = \left(\frac{1}{8}x^2\right)^2$.

3. (**Нагель Ігор**) Дано гострокутний трикутник ABC. На серединних перпендикулярах до його сторін AB і BC відповідно відмітили точки P і Q, а M і N – їх проекції на сторону AC (дивись рис.3). З'ясувалося, що $2MN = AC$. Доведіть, що описане коло трикутника PBQ проходить через центр описаного кола трикутника ABC.

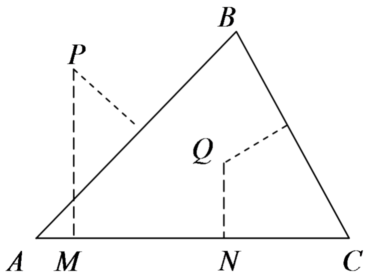

Рис.3

Розв'язання. Нехай O – точка перетину серединних перпендикулярів до сторін AB і BC. Тоді O – центр описаного кола трикутника ABC. Нехай ці серединні перпендикуляри перетинають сторони AB і BC в точках K і L відповідно. Тоді KL – середня лінія трикутника ABC. За властивістю середньої лінії одержуємо, що $KL \parallel AC$ і $2KL = AC$. Тому, $MKLN$ – паралелограм, бо $KL \parallel MN$ і $KL = MN$. Оскільки $PM \perp AC$ і $QN \perp AC$, то $PN \parallel QN$. Так як $PM \parallel QN$ і $KM \parallel LN$, то $\angle PMK = \angle QNL$ (рис.4).

Точки A і P видно із точок K і M під прямими кутами, тому точки P, K, M і A лежать на колі з діаметром PA. Аналогічно доводиться, що точки Q, N, C і L лежать на колі з діаметром CQ, а точки O, K, B і L лежать на колі з діаметром BO. Звідси випливає, що $\angle PAK = \angle PMK = \angle QNL = \angle QCL$.
Оскільки точки P і Q лежать на серединних перпендикулярах до сторін AB і BC, то трикутники APB і BQC – рівнобедрені. Звідси випливає, що $\angle PBA = \angle PAB = \angle QCB = \angle QBC$.
Таким чином, $\angle PBQ = \angle KBL = 180° - \angle KOL = 180° - \angle POQ$, тобто точки P, B, Q, O належать одному колу, що і треба було довести.

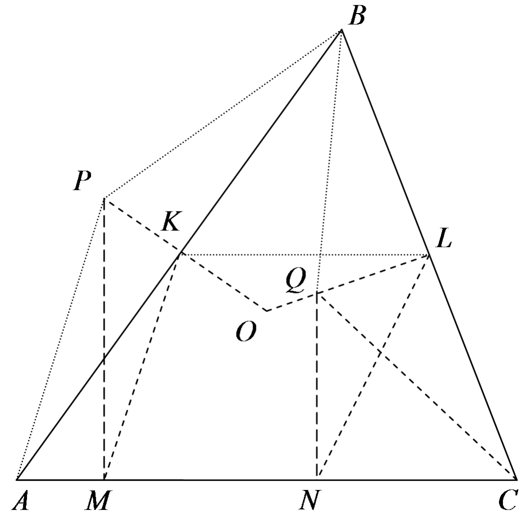

Рис.4

4. (**Сердюк Назар**) Натуральні числа a, b такі, що число $m = a+b+2\sqrt{ab+1}$ є натуральним. Доведіть, що m – складене число.

Розв'язання. Припустимо що $p = a+b+2\sqrt{ab+1}$ є простим для деяких натуральних a, b. Тоді $ab+1$ це квадрат цілого числа, отже числа a та b різні. За нерівністю Коші маємо $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Крім того $2\sqrt{ab}+1 > 2\sqrt{ab+1} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab+1}$. Число p непарне бо воно більше 2, отже $a+b-2\sqrt{ab+1}$ це натуральне число. З рівності $(a+b+2\sqrt{ab+1})(a+b-2\sqrt{ab+1}) = (a-b+2)(a-b-2) \neq 0$ випливає, що одне з чисел $a-b-2$, $a-b+2$ має ділитися на p, проте кожне з них не перевищує за модулем $a+b+2$, що менше за p. Отримана суперечність доводить задачу.

Розв'язання. **(Атамась Володимир).** З умови випливає, що $2\sqrt{ab+1}$ – натуральне число. Число $z = \sqrt{ab+1}$ не може бути не натуральним, бо інакше $ab+1$ було б дробовим, а це неможливо, бо a, b – натуральні. Тоді $b = \frac{z^2-1}{a} = \frac{(z-1)(z+1)}{a}$. Це означає, що a можна розкласти на множники $a = a_1a_2$ так, що $z-1$ ділиться на a_1, а $z+1$ – на a_2. $m = a + \frac{(z-1)(z+1)}{a} + 2z = \frac{(a+z)^2-1}{a} = \frac{(a+z-1)(a+z+1)}{a} = \frac{a+z-1}{a_1}\frac{a+z+1}{a_2}$. Обидва множники $\frac{a+z-1}{a_1}$ та $\frac{a+z+1}{a_2}$ – натуральні та більші одиниці, а тому m – складене.

10 клас

1. Парабола $y = ax^2+bx+c$ проходить через точки $A(-2,1)$ та $B(2,9)$ і не має спільних точок з віссю абсцис. Знайти усі значення які може приймати абсциса вершини параболи.

Відповідь: $(-4,-1)$.

Розв'язання. Запишемо умови, що парабола проходить через задані точки:

$$\begin{cases} 4a-2b+c=1, \\ 4a+2b+c=9, \end{cases}$$

звідки маємо, що $b=2$ та $4a+c=5$. З умови, що парабола не має дійсних коренів, маємо $D = b^2-4ac = 4-4a(5-4a) < 0$, звідки одержуємо умову на a: $\frac{1}{4} < a < 1$. Залишається розв'язати відповідну нерівність для абсциси вершини. Оскільки $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{a} \Rightarrow x_v \in (-4,-1)$.

2. (**Анікушин А., Рубльов Б.**) Для деяких дійсних чисел x, y числа x^2+y^2, x^3+y^3 та x^4+y^4 раціональні. Чи обов'язково число $x+y$ також раціональне?

Відповідь: Число обов'язково раціональне.

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок $xy = 0$, тобто припустимо, що, наприклад, $y = 0$. Якщо x^2 та x^3 – раціональні, то раціональним також є й число $\frac{x^3}{x^2} = x$.

Нехай тепер $xy \neq 0$. З рівності $\left(x^2 + y^2\right)^2 = (x^4 + y^4) + 2x^2y^2$ маємо, що $(xy)^2 \in \mathbb{Q}$. Але тоді $(x^6 + y^6) = (x^2 + y^2)\left((x^4 + y^4) - (xy)^2\right) \in \mathbb{Q}$. Тому з рівності $(x^3 + y^3)^2 = (x^6 + y^6) + 2(xy)^3$ випливає, що $(xy)^3 \in \mathbb{Q}$, але тоді вже й $\frac{(xy)^3}{(xy)^2} = xy \in \mathbb{Q}$, і остаточно $x + y = \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)-xy} \in \mathbb{Q}$, що й треба було довести.

3. (**Рубльов Богдан**) Андрій має картки, які з одного боку однакові, а на іншій стороні записані числа $1, 3, 5, \ldots, 2009$, а Леся – такі ж самі картки тільки з числами $2, 4, 6, \ldots, 2010$. Леся викладає усі свої картки в один ряд числами донизу (тобто значень чисел спочатку не видно), після цього Андрій викладає свої картки поверх Лесиних. Таким чином утворюється 1005 пар карток. Після цього числа у парах порівнюють і тому з гравців, у кого число більше, нараховується 1 бал. Андрію відомо, що Леся викладає свої картки з числами у порядку зростання зліва направо, починаючи з деякого місця. Коли вона доходить до останньої позиції, то далі знову починає викладати картки у порядку зростання з самої лівої позиції. Наприклад: $20, 22, 24, \ldots, 2010, 2, 4, \ldots, 18$. Андрій прагне набрати якомога більше очок. Яку кількість очок він може собі забезпечити, яким би не виявились розташування карток з числами у Лесі?

Відповідь: Андрій може набрати 502 очки.

Розв'язання. Для цього Андрій викладає свої картки справа наліво у такому порядку: $2009, 2007, 2005, \ldots, 3, 1$. Покажемо, що як би не викладала свої картки Леся Андрій набере 502 очки. Зробимо це методом математичної індукції. Усього у Лесі є 1005 варіантів викладання карток (кожний варіант зображений у відповідному рядку)

$$\left|\begin{array}{ccccc}
2 & 4 & 6 & 2008 & 2010 \\
4 & 6 & 8 & 2010 & 2 \\
6 & 8 & 10 & 2 & 4 \\
\multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
2008 & 2010 & 2 & 2004 & 2006 \\
2010 & 2 & 4 & 2006 & 2008
\end{array}\right|$$

Якщо порівняти варіант Андрія з першим рядком, то бачимо, що треба порівняти такі розклади: $2, 4, \ldots, 2010$ та $2009, 2007, 2005, \ldots, 3, 1$. Як бачимо Андрій набирає рівно 502 очки у перших стовпчиках. Це – база індукції. Припустимо, що у k-му рядку Андрій набирає 502 очки. Тоді вони набираються так: частина у перших стовпчиках, а решта – у останніх. Разом – 502.

Покажемо, що у наступному $(k+1)$-му рядку – їх буде стільки ж. У порівнянні з k-м рядком, буде зменшення на 1 очко на початку рядка та збільшення на 1 очко наприкінці.

Тепер покажемо, що кращого результату Андрій досягти не зможе. Оскільки Леся знає розташування карток Андрія вона вибере той рядок із можливих який дає максимальну кількість очок саме їй. Підрахуємо, а скільки усього балів може набрати Андрій при усіх можливих 1005 Лесиних розкладах карт. Розташуємо карти Андрія під низом наведеної таблички 1005×1005.

Підрахуємо загальну кількість балів: там, де стоїть число 2009, Андрій набере 1004 очки (програє лише тому рядку, де у Лесі – 2010), Андрійкове число 2007 загалом набере 1003 очко, і т.д., число 1 набере 0 очок. Таким чином, разом буде набрано $1004 + 1003 + \ldots + 1 + 0 = \frac{1005 \cdot 1004}{2} = 502 \cdot 1005$ очок.

Тому в середньому Андрій набирає 502 очки у кожній з 1005 варіантів. Тобто, якщо існують розклади, при якому хоч у одному рядку Андріїв виграш більше 502 очок, то існують варіанти, при яких виграш менший, а тому Леся може вибрати саме цей розклад. Таким чином наведений вище варіант для Андрія – найкращий.

4. (**Білокопитов Євген**) Точка P належить трикутнику ABC. Центри вписаних кіл у трикутники PBC, PAC, PAB позначимо через I_A, I_B, I_C відповідно. Позначимо через I_P – центр вписаного кола у трикутник $I_AI_BI_C$. Довести, що для точки P, яка задовольняє умову $I_P = P$, виконуються рівності:

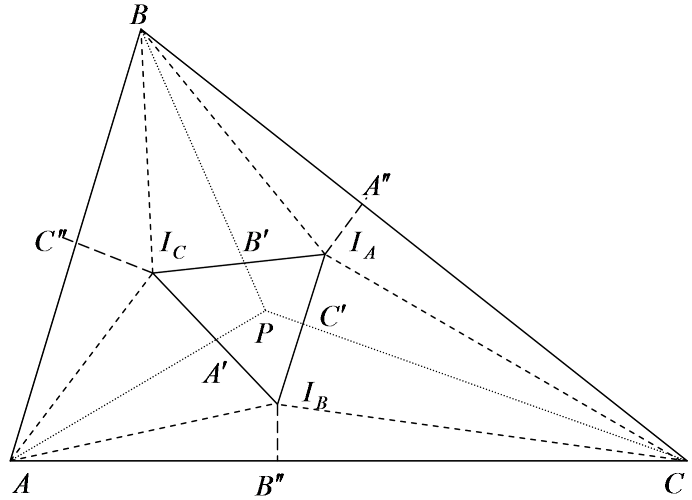

Рис.5

$$AP - BP = AC - BC,\ BP - CP = BA - CA,\ CP - AP = CB - AB.$$

Розв'язання. Позначимо точки $A' = AP \cap I_BI_C, B' = BP \cap I_AI_C, C' = CP \cap I_BI_A$ (рис.5). Оскільки $I_P = P$, то I_AP є бісектрисою кутів $\angle BPC$ та $\angle I_BI_AI_C$, тому дві пари прямих I_AI_B, I_AI_C, а також BP, CP симетричні відносно прямої I_AP. Тому $\angle(I_AI_B, CP) = \angle(BP, I_AI_C)$ (орієнтовні кути). Аналогічно $\angle(I_BI_C, AP) = \angle(CP, I_BI_A)$, $\angle(I_CI_A, BP) = \angle(AP, I_CI_B)$, отже $\angle(I_AI_B, CP) = \angle(BP, I_AI_C) = -\angle(AP, I_CI_B) = \angle(CP, I_BI_A) \Rightarrow CP \perp I_BI_A$.

А оскільки основа перпендикуляру, опущеного з інцентра трикутника на його сторону, є точкою дотику із цією стороною вписаного кола, то вписані кола в $\triangle PAC$ та PBC дотикаються прямої CP в C', отже ці два кола дотикаються і між собою. Аналогічно між собою в B' дотикаються вписані кола $\triangle PAB, \triangle PBC$ та PB, а в A' – вписані кола $\triangle PAC, \triangle PAB$. Нехай A'' – точка дотику вписаного кола $\triangle PBC$ та BC. Аналогічно визначаються точки B'', C''. Тоді

$$AP + BC = PA' + AA' + BA'' + A''C = PB' + AB'' + BB' + B''C = BP + AC.$$

Аналогічно $AP + BC = CP + AB$. Отже P – така точка, що $AP - BP = AC - BC, BP - CP = BA - CA, CP - AP = CB - AB$, що й треба було довести.

11 клас

1. (**Лейфура Валентин**) При яких дійсних числах a і b найбільше з чисел $3a^2 + 2b$ і $3b^2 + 2a$ приймає найменше значення?

Відповідь: $a = b = -\frac{1}{3}$.

Розв'язання. Нехай $M(a, b) = \max\{3a^2 + 2b, 3b^2 + 2a\}$. Тоді $M(a, b) \geq 3a^2 + 2b$ і $M(a, b) \geq 3b^2 + 2a$. Звідки випливає, що $2M(a, b) \geq 3a^2 + 2b + 3b^2 + 2a$. Таким чином,

$$\frac{2}{3}M(a, b) + \frac{2}{9} \geq \left(a + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0,$$

тобто $M(a, b) \geq -\frac{1}{3}$, причому $M(a, b) = -\frac{1}{3}$, якщо $a = b = -\frac{1}{3}$.

2. (**Сенін Віталій**) Розв'яжіть в цілих невід'ємних числах k, n рівняння

$$2^{2k+1} + 9 \cdot 2^k + 5 = n^2.$$

Відповідь: $k = 0, n = 4$.

Розв'язання. Розглянемо це рівняння по модулю 8. При $k \geq 3$ ліва частина кратна 8, а права частина на 8 не ділиться. Таким чином, залишається розглянути лише випадки $k \in \{0, 1, 2\}$.

При $k = 0$ маємо рівняння $n^2 = 16$ звідки $n = 4$.

При $k = 1$ маємо рівняння $n^2 = 31$, розв'язків немає.

При $k = 2$ маємо рівняння $n^2 = 73$, розв'язків немає.

3. (**Сердюк Назар**) Всередині паралелограма $ABCD$ відмічені точки P та Q, що симетричні відносно точки перетину діагоналей паралелограма. Доведіть, що кола описані навколо трикутників ABP, CDP, BCQ та ADQ мають спільну точку.

Розв'язання. Позначимо через X – другу точку перетину кіл, що описані навколо $\triangle ADQ$ та BCQ, QE – промінь, який має однаковий напрямок з променем CB (рис.6).

Тоді $\angle EQB = \angle QBC$, $\angle EQA = \angle QAD$ $\Rightarrow$ $AQB = \angle QAD + \angle QBC = 180° - \angle QXD + 180° - \angle QXC = \angle CXD$. Крім того, $\angle AQB = \angle CPD$, бо трикутники AQB та CPD центрально симетричні відносно центра паралелограма. Отже точки D, P, X, C лежать на одному колі. Аналогічно точки A, P, X, B також лежать на одному колі, тобто усі 4 кола мають спільну точку X, що й треба було довести.

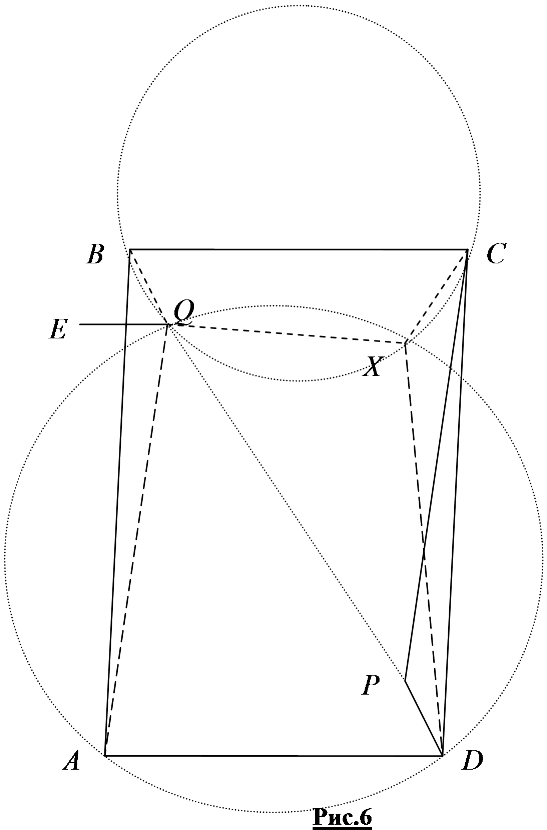

Рис.6

Це доведення спирається на конкретне розташування точок, а тому для повного доведення ще треба розглянути принаймні 3 випадки. Цього недоліку позбавлене інше розв'язання, яке ми тут наводимо. Воно спирається на орієнтовані кути.

Для визначених вище позначень маємо:

$\angle(QB; QA) = \angle(QB; BC) + \angle(BC; QA) = \angle(QB; BC) + \angle(AD; QA) = \angle(QX; XC) + \angle(DX; XQ) = \angle(DX; XC)$. Далі завершення співпадає з попереднім, оскільки, $\angle(QB; QA) = \angle(PD; PC)$ бо трикутники AQB та CPD центрально симетричні відносно центра паралелограма. Отже точки D, P, X, C лежать на одному колі. Аналогічно точки A, P, X, B також лежать на одному колі, тобто усі 4 кола мають спільну точку X, що й треба було довести.

4. (**Анікушин А., Рубльов Б.**) Відомо, що число α таке ірраціональне число, для якого існують числа x, y, такі що $x + y = \alpha$, а $x^k + y^k$ є раціональним числом для усіх натуральних k від 2 до n. Для якого найбільшого n це можливо?

Відповідь: $n = 3$.

__Розв'язання.__ Покажемо, що при $n = 4$ це неможливе.

Розглянемо спочатку випадок $xy = 0$, тобто припустимо, що $y = 0$. При $n = 2$ це можливо, як приклад $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $x^2 = 2 \in \mathbb{Q}$. Але, якщо x^2 та x^3 – раціональні, то раціональним також є й число $\frac{x^3}{x^2} = x$ також раціональне.

Нехай тепер $xy \neq 0$. При $n = 4$ маємо, що $x^2 + y^2, x^3 + y^3$, та $x^4 + y^4$ – раціональні. З рівності $\left(x^2 + y^2\right)^2 = (x^4 + y^4) + 2x^2y^2$ маємо, що $(xy)^2 \in \mathbb{Q}$. Але тоді $(x^6 + y^6) = (x^2 + y^2)\left((x^4 + y^4) - (xy)^2\right) \in \mathbb{Q}$, тоді з рівності $(x^3 + y^3)^2 = (x^6 + y^6) + 2(xy)^3$ маємо, що $(xy)^3 \in \mathbb{Q}$, але тоді вже й $\frac{(xy)^3}{(xy)^2} = xy \in \mathbb{Q}$, і остаточно $x + y = \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)-xy} = \alpha \in \mathbb{Q}$ – одержали суперечність.

Покажемо, що при $n = 3$ відповідні числа існують. Позначимо через $a = x+y$, $b = xy$. $x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy = (a-2b) \in \mathbb{Q}$, $x^3+y^3 = (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) = a(a^2-3b) \in \mathbb{Q}$. Підберемо такі ірраціональні a, b, щоб це виконувалось. Нехай $(a^2 - 2b) = p$, $a(a^2 - 3b) = q$, тоді $b = \frac{1}{2}(a^2 - p) \Rightarrow a(3p - a^2) = 2q$, таким чином маємо для a таке кубічне рівняння: $a^3 - 3ap + 2q = 0$. Підберемо деяке ірраціональне a, наприклад $a = 2 - \sqrt{2}$, далі послідовно обчислюємо p і q. Підставляємо у кубічне рівняння і маємо, що $p = \frac{14}{3}$, $q = 4$. Далі маємо, що $b = \frac{2}{3} - 2\sqrt{2}$, тобто для знаходження x, y маємо таку систему: $\begin{cases} x + y = 2 - \sqrt{2}, \\ xy = \frac{2}{3} - 2\sqrt{2}, \end{cases}$

тобто вони є коренями такого квадратного рівняння: $t^2 - at + b = 0$. Обчислимо його дискримінант, щоб переконатись, що ці числа є дійсними: $D^2 = a^2-4b = \frac{10}{3}+4\sqrt{2} > 0$.

Остаточно переконаємось, що $x^2+y^2 = (a^2-2b) = \frac{14}{3} = p$ та $x^3+y^3 = a(a^2-3b) = 4 = q$.

L Всеукраїнська олімпіада 2009-2010 років
Умови та розв'язки по усіх класах

Другий день

8 клас

5. (**Рубльов Б., Торба С.**) У різних вершинах рівностороннього трикутника зі стороною 1 знаходяться три бігуни: Перший, Другий та Третій. Вони одночасно починають рухатись вздовж сторін в одному напрямі (Другий в напрямі Першого, Третій – в напрямі Другого, Першій – в напрямі Третього). Чи обов'язково зустрінуться у якійсь момент в одній точці усі три бігуни одночасно, якщо:

а) швидкості Першого, Другого та Третього відповідно дорівнюють 2008, 2009 та 2010?

б) вони рухаються з різними швидкостями, кожна з яких є натуральним числом?

Відповідь: *а)* обов'язково; *б)* не обов'язково.

Розв'язання. *а)* Запишемо умову зустрічі бігунів у одній точці: $2008t = 2010t + 1 - 3m = 2009t + 2 - 3n$, де $m, n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$. Звільнимось у цих рівняннях від дійсного параметру t і одержимо: $t = 3n - 2$ або $2t = 6n - 4$. Також маємо $2t = 3m - 1 \Rightarrow 3m-1 = 6n-4 \Leftrightarrow m = 2n-1$, звідки шукані розв'язки легко знаходяться, наприклад, при $m = n = 1$ і , маємо $t = 1$. Простою підстановкою переконуємось, що дійсно через час $t = 1$ Перший пробіжить 2008, Другий – 2009 (на 1 більше, тобто як раз дожене Першого), Третій – 2010 і дожене Першого та Другого.

б) Нехай швидкості Першого, Другого та Третього відповідно 1, 2 та 4. Тоді умову зустрічі у одній точці можна записати таким чином: $t = 4t + 1 - 3m = 2t + 2 - 3n$, $m, n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$. Тоді $t = 3n - 2$ та $3t = 3m - 1$. Звідси маємо таке рівняння у цілих числах: $9n - 6 = 3m - 1$, яке очевидно не має розв'язків, тобто три одночасно не зустрінуться.

6. (**Рубльов Богдан**) Знайдіть найменше натуральне число n таке, що будь-яке з чисел $1, 2, \ldots, 10$ може буде подане як цифра або як сума кількох цифр десяткового запису числа n, що стоять поруч.

Відповідь: 11134.

Розв'язання. Зрозуміло, що трицифровим це число бути не може. Припустимо, що воно має чотири цифри: $\overline{abcd}$, тоді усього можна побудувати 10 різних комбінацій сум сусідніх цифр: $a, b, c, d, a+b, b+c, c+d, a+b+c, b+c+d, a+b+c+d$. Для виконання умов задачі усі ці 10 значень повинні бути різними. Таким чином усі цифри різні та їх сума 10, оскільки цифра 0 у нашому числі просто зайва, то єдиною можливою комбінацією цифр є 1, 2, 3, 4. Але для того, щоб одержати у сумі число 9, цифра 1 повинна стояти на краю, аналогічно для одержання у сумі цифри 8 на краю повинна бути також цифра 2. Таким чином, з точністю до порядку (прямого чи зворотного) можливі числа 1342 або 1432. Але для першого числа неможна одержати суму 5, для другого – 6.

Таким чином число щонайменше п'ятицифрове. Воно не може починатись з 1111, оскільки для одержання суми 10 нам треба мати одне з чисел 11116, 11117, 11118, 11119, а з цих чисел не можна представити число 5. Так само початок 1112 задає такі числа – 11125, 11126, 11127, 11128, 11129 (щоб сума цифр була не меншою від 10).

Але тоді не можна представити число 5 (крім другого числа) та 6 для другого числа. Таким чином для мінімального числа початок повинен бути щонайменше 1113. Числа 11131, 11132, 11133 очевидно не дають у сумі 10, а число 11134 задовольняє умови, а тому є за доведенням мінімальним.

7. (**Ясінський В'ячеслав**) Нехай a і b – такі натуральні числа, що

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] = a^2 + b^2,$$

де через (a, b) та $[a, b]$ позначені відповідно найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чисел a, b. Знайдіть $\left(2010^a - 1,\, 2010^b - 1\right)$.

Відповідь: $2010^a - 1$.

Розв'язання. Нехай $(a, b) = d$, тоді $a = dx$ і $b = dy$, де x та y – взаємно прості натуральні числа. Оскільки $[a, b] = \frac{ab}{(a,b)} = dxy$, то задана рівність перепишеться так $d^2x + d^2xy^2 = d^2x^2 + d^2y^2$, тобто $x + xy^2 = x^2 + y^2$. Звідки $(x-1)(x-y^2) = 0$, тобто $x = 1$ або $x = y^2$. Оскільки x і y – взаємно прості числа, то друга рівність дає $x = 1$, $y = 1$. В обох випадках $x = 1$, а це означає, що $b = ay$, де y – деяке натуральне число. У цьому випадку, матимемо

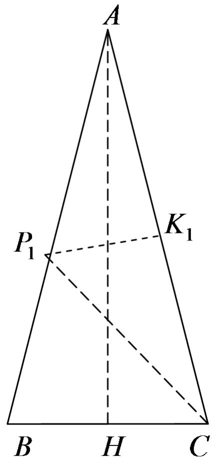

Рис.7

$$2010^b - 1 = (2010^a)^y - 1 = (2010^a - 1)\left((2010^a)^{y-1} + (2010^a)^{y-2} + \ldots + 2010^a + 1\right) \vdots\, 2010^a - 1.$$

Тому $\left(2010^a - 1,\, 2010^b - 1\right) = 2010^a - 1$.

8. (**Сердюк Назар**) Всередині рівнобедреного трикутника ABC з основою BC та гострим кутом при вершині відмічена точка P така, що $\angle BPC = 2\angle BAC$. Нехай K – основа перпендикуляра, опущеного з A на пряму, якій належить бісектриса кута, суміжного з кутом $\angle BPC$. Доведіть, що $BP + PC = 2AK$.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що точка K завжди розташована всередині $\triangle ABC$. Розглянемо випадок, коли точка $P = P_1$ лежить на стороні AB, тоді послідовно обчислимо кути. Нехай $\angle BAC = \alpha$ (рис.7), тоді $\angle BP_1C = 2\alpha$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\angle BCP_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{3\alpha}{2} \Rightarrow \angle P_1CA = \alpha$, таким чином $\triangle ACP_1$ – рівнобедрений, тому висота P_1K_1 є бісектрисою, тому точка $K = K_1$ належить стороні AC. Тому при розташуванні точки P всередині $\triangle ABC$ бісектриса PK зовнішнього кута $\angle BPC$ має менший кут з прямою BC. Тому й перпендикуляр з вершини A на цю пряму розташований між сторонами AB та AC трикутника ABC.

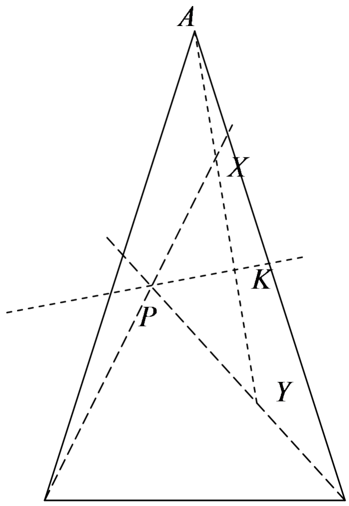

Рис.8

Продовжимо перпендикуляр AK до перетину з прямою CP (рис.8) (без обмеження загальності розгляду задачі, будемо вважати, що точка P ближче до точки B ніж до C). Так само пряма BP перетинається з прямою AK у точці X. Тоді у $\triangle PXY$ відрізок PK – одночасно висота та бісектриса, тому він рівнобедрений, тобто $\angle PXY = \angle PYX$, звідки $\angle BXA = \angle AYC$. Якщо тепер позначимо $x = \angle XBA$, $y = \angle YCA$, $x_1 = \angle CAY$, $y_1 = \angle BAX$, тоді $x_1 + y_1 = \alpha$, $\pi - \alpha = x + y + \angle PBC + \angle PCB = x + y + \pi - 2\alpha$ $\Rightarrow x + y = \alpha = x_1 + y_1$, крім того $x + y_1 = y + x_1$. З останніх двох рівностей маємо $x = x_1$, $y = y_1$. Таким чином $\triangle ABX = \triangle CAY$ за стороною та двома кутами.

Далі маємо такі рівності: $2AK = AX + AY = CY + BX = CY + BP + PX = CY + YP + BP = CP + BP$, що й треба було довести.

9 клас

5. Яку максимальну кількість вершин може мати опуклий багатокутник, у якого усі кути вимірюються цілим числом градусів?

Відповідь: 360.

Розв'язання. Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n-2)$, максимальний кут, який визначається цілим числом градусів – це $179°$. Таким чином ми можемо записати співвідношення $180°(n-2) \leq 179°n \Rightarrow n \leq 360$. Зрозуміло, що $n = 360$ – це найбільше можливе значення. Це, наприклад, досягається у правильному 360-кутнику. Можна міркувати таким чином: сума зовнішніх кутів дорівнює $360°$, і кожний зовнішній кут не менше $1°$, таким чином може бути не більше 360 таких кутів. Це, наприклад, досягається у правильному 360-кутнику.

6. (**Зуб Володимир**) Навколо гострокутного трикутника ABC описане коло. Хорда AD є бісектрисою кута трикутника та перетинає сторону BC у точці L, хорда DK перпендикулярна до його сторони AC і перетинає її в точці M. Знайдіть відношення $\frac{AM}{MC}$, якщо $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$.

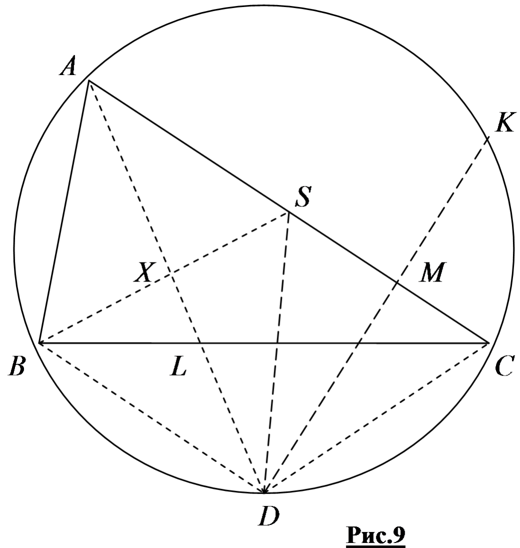

Рис.9

Відповідь: $\frac{AM}{MC} = 3$.

Розв'язання. За властивістю бісектриси $\frac{BL}{AB} = \frac{LC}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{LC}{BL}$, або $\frac{AC}{AB} = 2$, тобто $AC = 2AB$ (рис.9). Оскільки $\angle BAD = \angle DAC$ (AD – бісектриса $\angle BAC$), то ці кути спираються на рівні дуги, тобто $BD = DC$. Розглянемо S – середину відрізку AC. Тоді $AS = SC = AB$.
Тоді $\triangle BAD = \triangle SAD$ за двома сторонами та кутом між ними. Звідси випливає, що $BD = DS$. А тоді $DC = BD = DS$.

Отже, трикутник $\triangle SDC$ – рівнобедрений з основою SC. Тоді його висота DM є одночасно і медіаною. Отже, $MC = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{4}AC$. Тоді $AM = AC - MC = AC - \frac{1}{4}AC = \frac{3}{4}AC$. Отже, $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{\frac{3}{4}AC}{\frac{1}{4}AC} = 3$.
Зауваження: Оскільки в гострокутному трикутнику ABC $AC = 2AB$, то кут $\angle ACB$ не більше $30°$ (рис.10). Це значить, що перпендикуляр з точки D на пряму AC перетинає її у внутрішній точці відрізку AC.

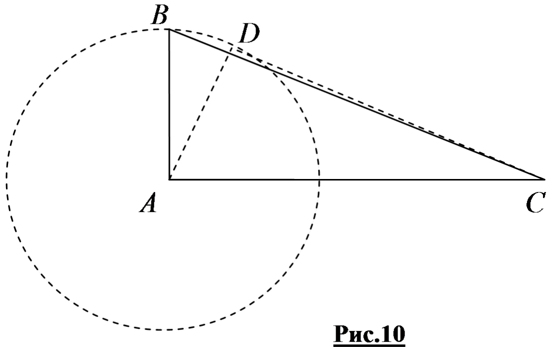

Рис.10

7. (**Безверхнєв Ярослав**) Куб складається з n^3 одиничних кубиків. Пряму, що проходить через центри рівно n одиничних кубиків назвемо "цікавою". Чи існує таке значення $n > 1$, при якому кількість цікавих прямих є степенем числа 2?

Відповідь: шуканого кубика не існує.

Розв'язання. Для кубика стороною n загальна кількість різних "цікавих" прямих буде дорівнювати $3n^2 + 6n + 4$. Це можна або безпосередньо обчислити, врахувавши, що "цікаві" прямі можуть бути трьох напрямів: паралельно ребру, паралельно діагоналі грані, діагональ усього кубика. Або застосувати такий підхід. Наліпимо на даний кубик шар кубиків товщиною в один кубик, таким чином отримавши новий кубик з розмірами $(n+2)\times(n+2)\times(n+2)$. Зауважимо, що кожна цікава пряма проходить через центри рівно двох "наліплених" кубиків, інакше вона б повністю належала зовнішньому шару. Причому через заданий "наліплений" кубик проходить рівно одна цікава пряма. Таким чином, кожна цікава пряма відповідає єдиній парі "наліплених" кубиків, а тому кількість цікавих прямих буде дорівнювати половині кількості "наліплених" кубиків, а саме $\frac{1}{2}\left((n+2)^3-n^3\right)=3n^2+6n+4$.

Тепер треба з'ясувати, чи існують натуральні розв'язки рівняння $3n^2+6n+4=2^l$. Позначимо $m=n+1$ і перепишемо його у такому вигляді: $3m^2+1=2^l$. Тепер розглянемо це рівняння за модулем 8. При $l\geq 3$ права частина кратна 8, а ліва частина на 8 не ділиться, оскільки дає остачі $1,4,5$ при діленні на 8. Таким чином залишається лише розглянути випадки $l=1$ та $l=2$.

При $l=1$ маємо $3m^2+1=2$ – немає натуральних розв'язків.

При $l=2$ маємо $3m^2+1=4$ – має натуральний розв'язок $m=1$, але тоді $n=0$, що суперечить умові.

Таким чином шуканого кубика не існує.

8. (**Сенін Віталій**) Дійсні числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$ задовольняють умови $a_1+a_2+\ldots+a_n=n$ та $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n\geq 0$. Доведіть, що справджується нерівність:

$$na_1\geq a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2.$$

Розв'язання. Доведення випливає з таких перетворень: $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\leq a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_1(a_1-a_1)+a_2(a_1-a_2)+a_3(a_1-a_3)+\ldots+a_n(a_1-a_n)=a_1(a_1+a_2+\ldots+a_n)=na_1$, що й треба було довести.

10 клас

5. (**Рубльов Богдан**) Розв'яжіть рівняння $\sin\frac{\pi\sqrt{x}}{4}+\cos\frac{\pi\sqrt{2-x}}{4}=\sqrt{2}$.

Відповідь: $x=1$.

Розв'язання. ОДЗ лівої частини нашого рівняння $x\in[0,2]$, при таких x обидві функції $\sin\frac{\pi\sqrt{x}}{4}$ та $\cos\frac{\pi\sqrt{2-x}}{4}$ є зростаючими, а тому сума також функція зростаюча. Звідси зрозуміло, що якщо рівняння має розв'язок, то він єдиний. Простим підбором знаходимо, що $x=1$ є розв'язком, а тому він шуканий.

6. (**Мисак Данило**) Знайдіть найменше натуральне число k, для якого існує такий набір з 2010 попарно різних натуральних чисел, що добуток будь-яких k чисел цього набору ділиться націло на добуток решти $2010-k$ чисел набору.

Відповідь: $k=1006$.

Розв'язання. З одного боку, k не може бути меншим, ніж 1006: інакше добуток k найменших чисел довільного набору буде меншим за добуток решти $2010-k\geq k$ чисел (усі множники у першому добутку будуть меншими за множники другого). З іншого боку, можна показати приклад набору, що задовольняє умову із $k=1006$.

Нехай $p_1,p_2,\ldots,p_{2010}$ — 2010 довільних попарно різних простих чисел і $a_i=p_1p_2\ldots p_{i-1}p_{i+1}\ldots p_{2010}=\frac{p_1p_2\cdots p_{2010}}{p_i}$. Тоді добуток 1006 чисел $a_{n_1},a_{n_2},\ldots,a_{n_{1006}}$ дорівнює $\dfrac{(p_1p_2\ldots p_{2010})^{1006}}{p_{n_1}p_{n_2}\ldots p_{n_{1006}}}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_{2010}^{\alpha_{2010}}$, де степінь α_i кожного простого числа $p_i, 1\leq i\leq 2010$, дорівнює 1005 або 1006, тобто не менший ніж 1005. Аналогічно, добуток решти 1004 чисел можна подати як $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_{2010}^{\beta_{2010}}$, де кожен степінь $\beta_i, 1\leq i\leq 2010$, дорівнює 1003 або 1004, тобто не перевищує 1004. Зрозуміло, що в такому випадку перший добуток ділиться на другий. Насамкінець, якщо $i \neq j$, то $a_i = \frac{p_1 p_2 \dots p_{2010}}{p_i} \neq \frac{p_1 p_2 \dots p_{2010}}{p_j} = a_j$, тож числа набору $\{a_i\}$ попарно різні.

7. (**Нагель Ігор**) На сторонах AB і BC трикутника ABC вибрали точки K і M відповідно так, що $AK = KM = MC$. Нехай N – точка перетину прямих AM і CK, P – основа перпендикуляра, опущеного з точки N на пряму KM, а Q – така точка відрізка KM, що $MQ = KP$. Доведіть, що вписане коло трикутника KMB дотикається сторони KM у точці Q.

Розв'язання. Нехай I – центр вписаного кола трикутника KMB. Тоді KI і MI – бісектриси $\angle BKM$ і $\angle BMK$ відповідно. Оскільки, за умовою задачі, трикутники AKM і CMK – рівнобедрені, то $\angle KAM = \angle KMA = \angle MKI = \angle BKI$ і $\angle MKC = \angle MCK = \angle KMI = \angle BMI$, причому ці кути гострі (рис.11). Це означає, що точка P належить відрізку KM. Так як $\angle IKM = \angle KMA$ і $\angle IMK = \angle MKC$, то $KI \parallel AM$ і $MI \parallel CK$, тобто чотирикутник $KIMN$ – паралелограм. Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то $KN = IM$. Так як $KP = MQ$ (за умовою), то трикутники PKN і QMI рівні (за двома сторонами і кутом між ними). З рівності цих трикутників випливає, що $\angle IQM = \angle NPK = 90°$. А це означає, що Q – точка дотику, що і треба було довести.

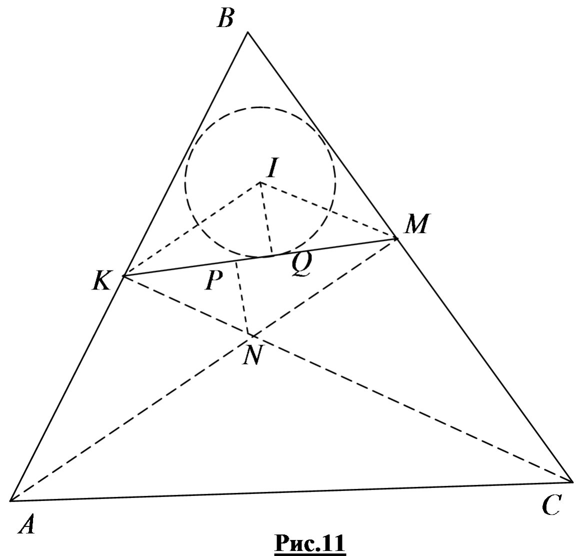

Рис.11

Розв'язання. **(Анікушин Андрій).** В рівнобедрених трикутниках AKM та KMC проведемо висоти KR та MS. Нехай прямі KR і MS перетинаються в точці T. Тоді в трикутнику TKM, прямі KS і MR є висотами, а отже N – ортоцентр TKM. Отже, TN – це також висота. Оскільки $NP \perp KM$ за умовою, то T, N, P – лежать на одній прямій. Оскільки трикутники AKM та KMC рівнобедрені, то KT і MT – бісектриси зовнішніх кутів BKM. Тому T – центр зовнівписаного кола, а P – точка дотику зовнівписаного кола до сторони KM. Отже, $BK + KP = BM + MP$, звідки $KB - MB + KP = PM$. Далі $KB - MB + KM = KB - MB + (KP + PM) = 2PM$. Тобто $KQ = PM = \frac{1}{2}(KB - MB + KM)$ звідки і випливає потрібне твердження.

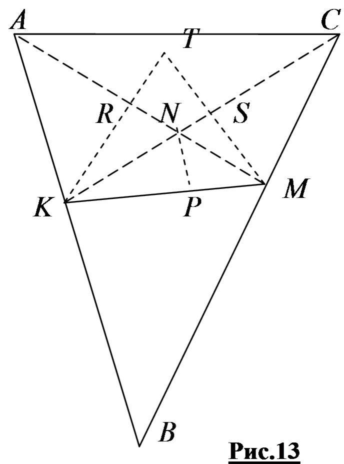

Рис.13

8. (**Майзліш О., Примак А.**) Яке найменше значення може приймати вираз

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2,$$

якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – попарно різні цілі числа.

Відповідь: $4n - 6$.

Розв'язання. Доведемо методом математичної індукції, що

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 \geq 4n - 6,$$

якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – попарно різні цілі числа.

База індукції очевидна. Дійсно, $S_2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \geq 2$, оскільки усі числа цілі та різні.

Тепер нехай твердження справджується для деякого n, тобто

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 \geq 4n - 6.$$

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ – попарно різні цілі числа. Оскільки цей вираз циклічний, то можемо вважати, що x_{n+1} – найбільше з даних чисел. Враховуючи, що x_1, x_n, x_{n+1} – цілі та попарно різні, отримуємо

$$(x_n - x_{n+1})^2 + (x_{n+1} - x_1)^2 - (x_n - x_1)^2 = (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_1) \geq 4.$$

Додаючи цю нерівність до припущення індукції, отримаємо потрібне твердження для $n + 1$.

Залишається навести приклади таких чисел, для яких в доведеній нерівності буде виконуватись рівність.

Для непарного $n = 2k - 1$ можна покласти $x_j = 2j - 2$ при $j \leq k$ та $x_j = -2j + 4k - 1$ при $j \geq k + 1$.

Для парного $n = 2k$ можна покласти $x_j = 2j - 2$ при $j \leq k$ та $x_j = -2j + 4k + 1$ при $j \geq k + 1$.

<u>Розв'язання</u>. **(Анікушин Андрій).** Нехай серед чисел $x_1, \ldots, x_n$ найбільше x_1, а найменше x_k. Тоді ясно, що $x_1 - x_k \geq n - 1$. За нерівністю між середнім квадратичним та середнім арифметичним маємо:

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j+1})^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - x_{j+1}| \right)^2 \geq$$

$$\geq \frac{((x_1 - x_2) + \ldots + (x_{k-1} - x_k) + (-x_k + x_{k+1}) + (-x_{k+1} + x_{k+1}) + \ldots + (-x_n + x_1))^2}{n} =$$

$$= \frac{(2(x_1 - x_k))^2}{n} \geq \frac{(2(n-1))^2}{n} = 4n - 8 + \frac{4}{n}.$$

Оскільки $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - x_{j+1})^2$ – натуральне, то $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - x_{j+1})^2 \geq 4n - 7$. Більше того, оскільки при піднесенні до квадрату парність не змінюэться, а $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - x_{j+1}) = 0$ – парне, то і $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - x_{k+1})^2$ також парне. А тому, воно не менше ніж $4n - 6$.

<u>11 клас</u>

5. (**<u>Рубльов Богдан</u>**) Для якого найменшого натурального числа N можна замість знаків $''*''$ у виразі $1 * 2 * 3 * \ldots * N$ поставити знаки $''+''$ та $''-''$ таким чином, щоб одержати значення виразу рівним:

а) 2010; ***б)*** 2011?

<u>Відповідь</u>: ***а)*** $N = 63$; ***б)*** $N = 65$.

<u>Розв'язання</u>. а) При усіх знаках + маємо такі нерівності: $1 + 2 + 3 + \ldots + 62 = 1953 < 2010$, $1 + 2 + 3 + \ldots + 63 = 2016 > 2011$. Таким чином $N \geq 63$. Легко показати, що тут відповідь $N = 63$, для цього достатньо розставити знаки таким чином – перед числом 3 поставити $''-''$, а решта знаків – це $''+''$, тоді $-3\cdot 2+1+2+3+\ldots+62+63 = 2016-6=2010$.

б) Тут для $N=63$ нічого не виходить, оскільки зміна знаку перед будь-яким числом не змінює парності значення виразу. Оскільки сума $1+2+3+\ldots+63=2016$ є парним числом, то зміна будь-яких знаків залишить значення виразу парним. Більше того, якщо до цього виразу ще додати один доданок, то це буде парне число 64, а тому вираз все одно залишиться парним і не дасть значення 2011. Таким чином, щонайменше треба $N=65$. А тепер вже знаки розставити доволі легко. Оскільки $1+2+3+\ldots+65=2145$, то $-2\cdot(2+65)+1+2+3+\ldots+65=2145-134=2011$.

6. (**Богданський Віктор**) В опуклому чотирикутнику $ABCD$ кути $\angle ABC$ та $\angle BCD$ не менші від 120°. Доведіть, що $AC+BD > AB+BC+CD$.

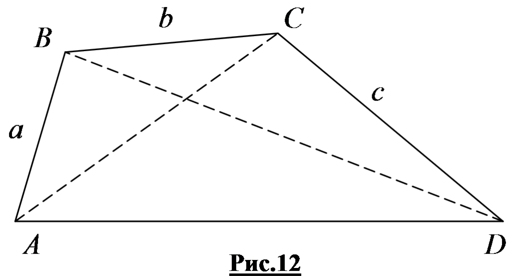

Рис.12

Розв'язання. Нехай $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ (рис.12). Тоді $AC^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle B \geq a^2+ab+b^2$. Аналогічно $BD^2 \geq b^2+bc+c^2 \Rightarrow AC+BD \geq \sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}$. Оскільки $\sqrt{a^2+ab+b^2} > a+\frac{1}{2}b$ і $\sqrt{b^2+bc+c^2} > c+\frac{1}{2}b$, то $AC+BD > a+b+c=AB+BC+CA$.

7. (**Петровський Дмитро**) Знайдіть усі такі функції $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, що

1) для довільних цілих чисел x,y $f\left(x+f(x+2y)\right)=f(2x)+f(2y)$;

2) $f(0)=2$.

Відповідь: $f(k)=k+2$.

Розв'язання. Підставимо $x=0$ та $y=0 \Rightarrow$

$$f\left(f(2y)\right)=f(2y)+2, \tag{1}$$

$$f\left(x+f(x)\right)=f(2x)+2, \tag{2}$$

Доведемо індукцією по n, що $f(2n)=2n+2$. База, при $n=0$ – вже доведена. З припущення, що $f(2n)=2n+2$ треба показати, що справджується рівність: $f(2n+2)=2n+4$.

При $n=2m$ треба показати, що $f(4m+2)=4m+4$. Підставимо $x=2m$ в (2): одержимо

$$f\left(2m+f(2m)\right)=f(2m+2m+2)=f(4m+2)=f(4m)+2=4m+4.$$

При $n=2m-1$ $f(4m)=4m+2$. Підставимо $y=2m-1$ в (1):

$$f\left(f(4m-2)\right)=f(4m)=f(4m-2)+2=4m+2.$$

Повністю аналогічно ця рівність доводиться для від'ємних n, звідки для усіх цілих n одержимо $f(2n)=2n+2$. Нехай k – непарне, підставимо у вихідне співвідношення $x=2z+k$, $y=-z$, $z\in\mathbb{Z}$, тоді

$$f\left(2z+k+f(k)\right)=f(4z+2k)+f(-2)=4z+2k+2-2z+2=2z+2k+4, \tag{3}$$

Розглянемо випадки. $f(k)$ – парне. Тоді підставимо в (3): $z=-\frac{f(k)}{2}$, тоді $f(k)=-f(k)+2k+4$, звідки $f(k)=k+2$ – непарне, тобто одержали суперечність. $f(k)$ – непарне. Тоді $2z+k+f(k)$ – парне, а тому $f\left(2z+k+f(k)\right)=2z+k+f(k)+2$. З урахуванням (3) маємо $f\left(2z+k+f(k)\right)=2z+k+f(k)+2=2z+2k+4$, звідки остаточно одержуємо, що $f(k)=k+2$, $k\in\mathbb{Z}$.

8. (**Лішунов В., Рубльов Б.**) Числа $1, 2, \ldots, n$ у деякому порядку розставлені в ряд. З ними дозволяється робити таку операцію: беруть довільні дві пари сусідніх елементів, які не мають спільних членів та міняють ці пари місцями. Чи завжди можна за скінченну кількість таких операцій одержати монотонний (зростаючий або спадний) набір чисел, якщо:

а) $n = 2009$; ***б)*** $n = 2010$?

Відповідь: ***а)*** не завжди; ***б)*** завжди.

Розв'язання. Якщо розглянути 5 сусідніх елементів, то з комбінації 12345 послідовно можна одержати такі:

$$12345 \to 14523 \to 23514 \to 51234 \to 53412 \to 12453. \tag{4}$$

Тобто останні три елементи були циклічно переставлені, тому аналогічно можна одержати й трійку 12534. Якщо зробити симетричні перестановки, то так само ми можемо переставити циклічно й три перші елементи п'ятірки:

$$12345 \to 34125 \to 25134 \to 23451 \to 45231 \to 31245. \tag{5}$$

Розглянемо деякі чотири позиції всередині списку, наприклад з номерами 1001–1004. На числа з такими значеннями поки що не зважаємо і послідовно розставляємо на свої місця числа з номерами $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Як це можна зробити показано нижче на прикладі числа 500. Припускаємо, що числа 1–499 вже зайняли своє позиції. Більше ми їх для перестановок не чіпаємо. Якщо 500 стоїть поруч справа від 499, тобто на своїй позиції, то все зроблене. Якщо 500 стоїть останнім n-м номером, то міняємо місцями пари, які займають позиції з номерами $(n-3, n-2)$ та $(n-1, n)$ і 500 вже займає не останню позицію. Якщо 500 стоїть через одну позицію від 499, тобто на 501-му місці, то спочатку робимо заміну пар, які займають такі номери: (500,501) та (502,503). Тепер нехай вже 500 займає деяку позицію $k \in \{502, 503, \ldots, n-1\}$, тоді ми робимо заміну пар з такими номерами: (500,501) та $(k, k+1)$ і число 500 займає свою позицію. Таким чином ми розставимо на свої місця усі числа 1–1000. Після цього, аналогічно симетрично переставимо на свої місця числа $1005 - n$. Таким чином ми завжди зможемо одержати таку розстановку:

$$1, 2, \ldots, 1000, a, b, c, d, 1005, 1006, \ldots, n,$$

де набір (a, b, c, d) є деякою перестановкою чисел $(1001, 1002, 1003, 1004)$. Подивимось, які перестановки (a, b, c, d) ми зможемо одержати. Усього їх 24. Якщо розглянути п'ятірку $(1000, a, b, c, d)$, то шляхом використання схеми (4) одержимо ще такі: $(1000, a, c, d, b)$ та $(1000, a, d, b, c)$. Якщо до одержаних четвірок (a, b, c, d), (a, c, d, b) та (a, d, b, c) додати справа число 1005, та застосувати схему (5), ми одержимо такі перестановки: (b, c, a, d), (c, a, b, d), (c, d, a, b), (d, a, c, b), (d, b, a, c), (b, a, d, c). Знову застосувавши схему (4) до деяких з одержаних маємо ще 3 варіанти, які можна одержати: b, d, c, a, c, b, d, a та d, c, b, a. Тобто 12 з 24 ми одержати змогли. Покажемо, що при спробі розставити числа саме у зростаючому порядку інші 12 позицій досягнути неможливо.

Для довільної розстановки чисел $1, 2, \ldots, n$ назвемо інверсією випадок, коли більше число стоїть лівіше за менше, наприклад позиція з 5 чисел 23514 має інверсії: (2,1), (3,1), (5,1) та (5,4). Назвемо кількість таких інверсій "інваріантом позиції". Покажемо, що після виконання будь-якої дозволеної операції інваріант позиції змінюється на число, яке кратне 2. Припустимо, що ми поміняли числа (a, b) та (c, d), які займали позиції $(k, k+1)$ та $(l, l+1)$, $k < l$. Тоді після перестановки не змінюється кількість інверсій, до яких причіпні числа, що розташовані на позиціях $1, 2, \ldots, (k-1)$ та $(l+2), (l+3), \ldots, n$. Тобто, якщо інверсія була, то вона й залишиться, й навпаки, якщо вона не утворювалася, то вона й не з'явиться. Кількість інверсій, у яких задіяні числа на позиціях $(k+2),(k+3),\ldots,(l-1)$ не зміниться по відношенню одне одного. Але якщо розглянути деяке число e, що займає одну вказаних позицій, то по відношенню до кожного з чисел тих пар (a,b) та (c,d), які переставляються вона зміниться. І змінюється це обов'язково з 0 на 1, чи навпаки, з 1 на 0. Якщо спочатку була інверсія між числами, наприклад, a і e (тобто у загальний інваріант позиції додавалась від цієї пари 1), то після перестановки інверсія зникає (у загальну суму додається 0) і навпаки. Таким чином загальна кількість змін буде парною, тому й парність інваріанту позиції не зміниться. Ну я що стосується чисел a,b,c,d, то між a і b, та c і d нічого не зміниться, а між усіма іншими парами (їх 4) так само усе міняється на протилежне, а тому й парність суми інверсій не змінюється.

Таким чином зрозуміло, що ми не зможемо з позиції $1,2,3,4,\ldots,n$ (інваріант якої 0) перейти у позицію $2,1,3,4,5,\ldots,n$ (інваріант 1). Тобто одержати всередині з перестановки a,b,c,d решту 12 інших перестановок ми не зможемо.

Але усе це стосувалося лише спроби розставити числа за зростанням. Повністю аналогічно можна спробувати їх розставити за спаданням. Як ми бачимо усі позиції розбилися на дві великі групи позицій, з парним та непарним інваріантом, які не можна перетворити одна в іншу. Обчислимо інваріант такої позиції: $n,n-1,n-2,\ldots,3,2,1$. Тут кожна пара чисел утворює інверсію, а тому й їх загальна кількість $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$. Якщо це число парне, то обидві монотонні позиції знаходяться в одній половині, тобто їх можна перетворити одна в іншу, але не усі позиції можна одержати з них. Якщо ж навпаки, це число непарне, то будь-яка початкова позиція у відповідності з її інваріантом може бути перетвореною або у зростаючу, або у спадну послідовність. Таким чином залишається з'ясувати парність числа $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$. Оскільки n та $n-1$ різної парності, то це число буде парним, якщо одне з цих чисел є кратним 4, тобто при $n=4m$ або $n=4m+1$, інакше воно непарне. Таким чином, при $n=2009\equiv 1 \pmod 4$ не усі позиції можна перетворити одна у іншу. А при $n=2010\equiv 2 \pmod 4$ навпаки, з кожної позиції такими перестановками можна одержати або зростаючий, або спадний набір заданих чисел.