Технічний ліцей, 10-й клас. Контрольно-тренувальна олімпіада. Геометрія, принцип Діріхле

1. Доведіть, що сума довжин висот будь-якого трикутника менша за його периметр.
2. Усередині правильного шестикутника зі стороною 1 міститься 7 точок. Доведіть, що серед них обов'язково є дві точки на відстані, що не перевищує 1.
3. Доведіть, що якщо *a*, *b*, *c* — довжини сторін деякого трикутника, то $a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2}$.
4. З допомогою циркуля та лінійки побудуйте вписане, описане та зовнівписані кола заданого трикутника.
5. Доведіть, що шість ребер будь-якого тетраедра можна розбити на три пари (*a*, *b*), (*c*, *d*), (*e*, *f*) так, щоби з відрізків із довжинами $a + b$, $c + d$, $e + f$ можна було скласти трикутник.
6. Нехай *ABCD* — опуклий чотирикутник. Середини сторін *AB* та *CD* позначимо відповідно як *K* та *M*, точку перетину *AM* і *DK* — як *O*, точку перетину *BM* і *CK* — як *P*. Довести, що площа чотирикутника *MOKP* дорівнює сумі площ трикутників *AOD* та *BPC*.

Час роботи — 90 хвилин

Технічний ліцей, 10-й клас. Контрольно-тренувальна олімпіада. Геометрія, принцип Діріхле

1. Доведіть, що сума довжин висот будь-якого трикутника менша за його периметр.
2. Усередині правильного шестикутника зі стороною 1 міститься 7 точок. Доведіть, що серед них обов'язково є дві точки на відстані, що не перевищує 1.
3. Доведіть, що якщо *a*, *b*, *c* — довжини сторін деякого трикутника, то $a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2}$.
4. З допомогою циркуля та лінійки побудуйте вписане, описане та зовнівписані кола заданого трикутника.
5. Доведіть, що шість ребер будь-якого тетраедра можна розбити на три пари (*a*, *b*), (*c*, *d*), (*e*, *f*) так, щоби з відрізків із довжинами $a + b$, $c + d$, $e + f$ можна було скласти трикутник.
6. Нехай *ABCD* — опуклий чотирикутник. Середини сторін *AB* та *CD* позначимо відповідно як *K* та *M*, точку перетину *AM* і *DK* — як *O*, точку перетину *BM* і *CK* — як *P*. Довести, що площа чотирикутника *MOKP* дорівнює сумі площ трикутників *AOD* та *BPC*.

Час роботи — 90 хвилин

Технічний ліцей, 10-й клас. Контрольно-тренувальна олімпіада. Геометрія, принцип Діріхле

1. Доведіть, що сума довжин висот будь-якого трикутника менша за його периметр.
2. Усередині правильного шестикутника зі стороною 1 міститься 7 точок. Доведіть, що серед них обов'язково є дві точки на відстані, що не перевищує 1.
3. Доведіть, що якщо *a*, *b*, *c* — довжини сторін деякого трикутника, то $a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2}$.
4. З допомогою циркуля та лінійки побудуйте вписане, описане та зовнівписані кола заданого трикутника.
5. Доведіть, що шість ребер будь-якого тетраедра можна розбити на три пари (*a*, *b*), (*c*, *d*), (*e*, *f*) так, щоби з відрізків із довжинами $a + b$, $c + d$, $e + f$ можна було скласти трикутник.
6. Нехай *ABCD* — опуклий чотирикутник. Середини сторін *AB* та *CD* позначимо відповідно як *K* та *M*, точку перетину *AM* і *DK* — як *O*, точку перетину *BM* і *CK* — як *P*. Довести, що площа чотирикутника *MOKP* дорівнює сумі площ трикутників *AOD* та *BPC*.

Час роботи — 90 хвилин