Подільність

Сердюк Назар, nsaann@gmail.com

- Для взаємнопростих натуральних чисел a, n: $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$.
- Для натурального n та цілих невід'ємних a, b: $(n^a - 1, n^b - 1) = n^{(a,b)} - 1$.
- Для натуральних чисел a, n: $n | \varphi(a^n - 1)$.
- Нехай n – натуральне число, a – натуральне число, взаємнопросте з n. Позначимо за $\operatorname{ord}_n(a)$ – найменше натуральне число d таке, що $a^d \equiv 1 \mod n$. Тоді якщо $a^m \equiv 1 \mod n$, то $\operatorname{ord}_p(a)|m$.
- Нехай p – непарне просте число, a, b – натуральні числа і $a \equiv b \bmod p$. Позначимо за $f_p(m)$ – найбільше ціле k таке, що $p^k|m$. Тоді для будь-якого натурального n: $f_p(a^n - b^n) = f_p(a - b) + f_p(n)$.
- Для будь-якого натурального n виду $2, 4, p^k, 2p^k$ для деякого непарного простого p існує таке натуральне число g, взаємнопросте з n, що усі числа $g, g^2, \ldots, g^{\varphi(n)}$ дають різні остачі при діленні на n.

1. Доведіть, що $m^2 + n^2$ ділиться на 101 тоді та тільки тоді коли $(10m + n)(10n + m)$ ділиться на 101.
2. Нехай $n_1, n_2, \cdots, n_k$ – натуральні числа $k \geq 2$. Відомо, що $2^{n_i} - 1$ ділиться на n_{i+1} для будь-якого $1 \leq i \leq n$ $(n + 1 = 1)$. Доведіть, що $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$.
3. Знайдіть усі трійки натуральних чисел a, b, c для яких $2^a + 2^b + 1$ ділиться на $2^c - 1$.
4. Знайдіть усі пари натуральних чисел (x, n) для яких $x^{n+1} + 2^{n+1} + 1$ ділиться на $x^n + 2^n + 1$.
5. Для натуральних a, b, c відомо, що $a^2 + b^2 + c^2$ ділиться на $a + b + c$. Доведіть, що існує нескінченно багато натуральних n для яких $a^n + b^n + c^n$ ділиться на $a + b + c$.
6. Нехай p – просте, $f_p(x) = x^{p-1} + \cdots + x + 1$. Доведіть, що якщо $p|m$, то існує простий дільник числа $f_p(m)$ взаємно простий з числом $m(m - 1)$.
7. Доведіть, що кожний простий дільник числа $2^{2^n} + 1$ порівняний з 1 за модулем 2^{n+1}.
8. Нехай p, q – прості числа та $q > 5$. Відомо, що $2^p + 3^p$ ділиться на q. Доведіть, що $q > p$.
9. Знайдіть усі пари простих чисел p та q для яких $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$ ділиться на pq.
10. Знайдіть усі трійки простих чисел p, q, r такі, що $p|q^r + 1$, $q|r^p + 1$, $r|p^q + 1$.
11. Відомо, що $4^n + 2^n + 1$ – просте. Доведіть, що $n = 3^k$ для деякого невід'ємного цілого k.
12. Нехай a, b, k – натуральні числа, $n > 1$ – непарне натуральне число, p – непарне просте число та $a^n + b^n = p^k$. Доведіть, що $n = p^m$ для деякого натурального m.
13. Для простих p та q відомо, що $p^2 + 1$ ділиться на q і $q^2 - 1$ ділиться на p. Доведіть, що $p + q + 1$ – складене число.
14. Знайдіть усі натуральні n для яких $2^n + 1$ ділиться на n^2.
15. Знайдіть усі трійки натуральних (a, m, n) для яких $(a + 1)^n$ ділиться на $a^m + 1$.
16. Нехай a, b – два різних раціональних числа, причому існує безліч натуральних n, для яких $a^n - b^n$ – ціле. Доведіть, що числа a та b – цілі.
17. Доведіть, що для будь-якого натурального k існує натуральне число n таке, що $2^k|3^n + 5$.
18. Знайдіть усі цілі розвязки рівняння $\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$.
19. Доведіть, що для будь-якого натурального $n > 1$ найбільший простий дільник числа $2^{2^n} + 1$ не менший за $n \cdot 2^{n+2} + 1$.