Задача 1. Пусть $F(x_1,\dots,x_n)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Предположим, для некоторого натурального k_0 при всех натуральных $x_1,\dots,x_n \geqslant k_0$ $F(x_1,\dots,x_n)=0$. Докажите, что F — нулевой многочлен.

Задача 2. Докажите, что $\binom{x+1}{k}-\binom{x}{k}=\binom{x}{k-1}, x\in\mathbb{R}$ для $k\geqslant 1$. С помощью этого установите, что при $x\in\mathbb{Z}$ $\binom{x}{n}\in\mathbb{Z}$.

Задача 3. Многочлен $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ называется целозначным, если $P(x)\in\mathbb{Z}$ при всех $x\in\mathbb{Z}$. Докажите, что $P(x)$ целозначный тогда и только тогда, когда $P(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\binom{x}{k}$, где $c_0,\dots,c_n$ целые.

Задача 4. Пусть $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ многочлен степени n. Предположим, что числа $P(a),P(a+1),\dots,P(a+n)$ целые для некоторого $a\in\mathbb{Z}$. Докажите, что $P(x)$ — целозначный.

Задача 5. Обозначим $a_m(k,n)$ количество решений уравнения $x_1+\ldots+x_k=n$, где $0\leqslant x_i\leqslant m$ (порядок имеет значение). Найти $a_m(k,n)$ (формула не простая).

Задача 6. Рассмотрим 1000000 билетов: от 000000 до 999999. Билет $abcdef$ назовём счастливым, если $a+b+c=d+e+f$. Найти количество счастливых билетов.

Задача 7. Для натурального $n\geqslant 1$ обозначим $p(n)$ количество разбиений n на натуральные слагаемые (т.е. представление n в виде суммы натуральных слагаемых. Порядок роли не играет. Например, разбиения $3=1+2$ и $3=2+1$ одинаковы). Определим $p(0)=1$. Обозначим $\pi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n$ — производящая функция последовательности $p(n), n\geqslant 0$. Введём функцию Эйлера $\varphi(x)=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$.

(1) Почему $\varphi(x)$ корректно определена?
(2) Докажите, что $\pi(x)\varphi(x)=1$,
(3) Докажите, что

$$\varphi(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x^{(3n^2-n)/2}+x^{(3n^2+n)/2})=1-(x+x^2)+(x^5+x^7)-(x^{12}+x^{15})+\ldots$$

(4) Получите реккурентное соотношение для $p(n), n\geqslant 1$. Составтье таблицу значений $p(n), n=1,2,\dots,15$.

Задача 8. Для натурального n обозначим $p(n)$ количество разбиений n на слагаемые, каждое из которых равно одному из заданых чисел $k_1,\dots,k_m$. Найти производящую функцию $\pi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n$.

Задача 9. 1. Докажите (с помощью производящих функций), что количество разбиений n на различные слагаемые равно количеству разбиений n на нечётные слагаемые.

2. Решите эту задачу комбинаторно, т.е. постройте взаимно-однозначное соответствие между разбиениями n на различные слагаемые и разбиениями n на нечётные слагаемые.

3. Нёчётность числа означает, что число не делится на 2. Обобщите задачу на случай, когда вместо 2 рассматривается натуральное m (т.е. сформулировать результат и выполнить 2 предыдущих пункта).

Задача 10. Пусть $a_n, n\geqslant 0$, $b_n, n\geqslant 0$ две периодические последовательности действительных чисел с периодами p и q соответственно. Предположим, $a_n=b_n$ для некоторых $p+q-(p,q)$ последовательных значений n. Докажите, что тогда $a_n = b_n$ при всех $n \geqslant 0$. Тут (p,q) обозначен наибольший общий делитель p, q.