

Геометрия: вписанные четырёхугольники

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

1. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E ; AD — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $AE = ED$.
2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_1 и BH_2 . Доказать, что $\angle CH_2H_1 = \angle CBA$.
3. На хорде AB окружности ω с центром O взяли точку C . Описанная окружность треугольника AOC пересекает ω в точке D . Докажите, что $BC = CD$.
4. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC . Доказать, что точка, симметричная H относительно стороны BC , лежит на описанной окружности треугольника ABC .
5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $AB = BC$ и $\angle ABC = 2(180^\circ - \angle ADC)$. Доказать, что $AB = BD$.
6. Дан треугольник ABC . Точка I — центр вписанной окружности ABC , I_A — внеписанной окружности, которая касается стороны BC . Доказать, что точки B, C, I, I_A лежат на одной окружности. Доказать, что центр этой окружности лежит на описанной окружности ABC ?
Сравнить с "теоремой про тризуб"!!!
7. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC , выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC .
8. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Прямая пересекает эти окружности последовательно в точках A, B, C и D . Доказать, что $\angle APB = \angle CQD$.
9. Пусть O — центр описанной окружности ω остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_1 с центром K проходит через точки A, O и C и пересекает стороны AB и BC в точках M и N . Известно, что точки L и K симметричны относительно прямой MN . Докажите, что $BL \perp AC$.
10. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Окружность, описанная вокруг треугольника ABO , пересекает сторону AD в точке E . Окружность, описанная вокруг треугольника DOE , пересекает отрезок BE в точке F . Докажите, что $\angle BCA = \angle FCD$.
11. Из точки P к окружности ω провели касательные PA, PB и секущую, которая пересекла окружность в точках C, D . Пусть M — середина отрезка CD . Доказать, что CD содержит биссектрису угла BMA .
12. В остроугольном треугольнике ABC отмечен ортоцентр H и середина M стороны BC . Луч MH пересекает описанную окружность ABC в точке K . Доказать, что $\angle HKA = 90^\circ$.