Комбінаторика

1. На колі є сині та червоні точки. Дозволяється добавити чи видалити одну червону точку, і псля цього поміняти кольори сусідніх точок до вище описаної точки. На початку всього дві червоні точки на колі і 0 синіх. Доведіть, що не можна отримати 2 сині та 0 чеврвоних точок на колі.
2. В таблиці NxN, заповненої числами, всі рядки різні. Довести, що можна видалити стовпчик так, щоб в тадлиці, що вийде всеодно буде два різних рядка.
3. Нехай $a_1, a_2, .., a_{101}$ - така перестановка чисел від 2 до 102, що $a_k \vdots k$ для всіх k. Знайти всі такі перестановки.
4. В країні більше 101 міста. Столиця з'єднана авіалініями рівно зі 100 містами. Усі інші міста з'єднані рівно з 10 містами. Відомо, що з будь-якого міста можна добратися в будь-який. Доведіть, що можна закрити як мінімум половину авіаліній зі столиці, що всеодно можна буде потрапити з кожного міста в кожне.
5. Є N міст. Кожні два з'єднані дорогою. Злий чаклун встановлює на всіх дорогах односторонній рух таким чином, щоб якщо з міста можна виїхати, то в нього не можна було б вернутись. Доведіть, що:
   а) він зможе так зробити;
   б) знайдеться місто, з якого можна добратися до всіх, і знайдеться місто, з якого неможна виїхати;
   в) існує лише єдиний шлях по всіх містах;
   г) чарівник може це зробити N! способами.
6. Декілька дітец стоять по колу. У кожного є якась кількість цукерок. По команді кожен передпє половину своїх цукерок правому сусіду. Якщо у когось виявилось непарна кількість цукерок, то йому добавляється одна цукера. Це повторюється багато разів. Доведіть, що настане час, коли у всіхбуде порівну цукерок.
7. На фестивалі камерної музики зібралось шість музикантів. На кожному концерті частина з музикантів виступає, а інші слухають із залу. За яку найменшу кількість концертів кожен з шести музикантів зможе послухати всіх інших?
8. На прямій сидять 3 цвіркуна. Кожну секунду пригає один з них через якогось іншого цвіркуна(але не через обох одразу). Доведіть, що після 1985 секунд вони не можуть вернутися в початкове положення.
9. З чисел 1, 2, 3, .., 1985 виберіть найбільшу кількість чисел так, що різниця будь-яких двох з них не була простим числом.