Нерівність Йенсена

Означення 1. Функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ називається опуклою вниз, якщо $\forall \lambda \in [0,1]$ $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ виконується нерівність

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geqslant f\bigl(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\bigr).$$

Теорема 1. *Якщо* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *— неперервна і* $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geqslant f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ *для усіх* $x_1, x_2 \in [a,b]$*, то* f *— опукла вниз.*

Теорема 2. *Якщо* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *— двічі диференційовна і* $f''(x) \geqslant 0$ *для усіх* $x \in [a,b]$*, то* f *— опукла вниз.*

Теорема 3 (**Нерівність Йенсена**). *Нехай* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *— опукла вниз. Тоді для будь-яких* $\alpha_i \in [0,1]$ *таких, що* $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$*, і* $x_i \in [a,b]$ $(i = \overline{1,n})$ *має місце нерівність*

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n) \geqslant f\bigl(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n\bigr).$$

Для більш глибокого розуміння поняття опуклості функції корисними будуть такі два твердження.

Твердження 1. *Для довільної функції* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *будемо називати множину* $\bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geqslant f(x)\bigr\}$ *її надграфіком. Доведіть, що* f *— опукла вниз тоді і тільки тоді, коли її надграфік — опукла множина.*

Твердження 2. *Нехай* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *— опукла вниз. Тоді для довільних* x, x_1, x_2 *таких, що* $a \leqslant x_1 < x < x_2 \leqslant b$*, виконується нерівність*

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x)}{x_3-x}.$$

Твердження доводити не забороняється. Який геометричний зміст останнього твердження?

Досить теорії! Хочу задач...

1. Довести тотожності: а) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$; б) $\log_{a^\beta} x^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a x$.
2. Є дійсні числа $x_1, x_2, \dots, x_n$. Знайти мінімум функції $f(x) = |x-x_1| + |x-x_2| + \dots + |x-x_n|$.
3. A, B, C —кути трикутника. Довести, що а) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$, б) $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$, в) $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geqslant \sqrt{3}$.
4. Для додатних чисел a, b, c довести нерівність $a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{(a+b+c)/3}$.
5. Для додатних чисел x, y, z таких, що $x+y+z=1$, довести нерівність
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$
6. Довести нерівність
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \geqslant x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n},$$
де $a_1 + \dots + a_n = 1$, $x_i \geqslant 0$, $a_i > 0$.
7. Для додатних a, b, c і натурального m довести нерівність
$$\frac{a^m}{b+c} + \frac{b^m}{c+a} + \frac{c^m}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m-1}.$$
8. Для додатних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ таких, що $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, довести нерівність
$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$