Теория чисел. Делимость, оценки.

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

Упражнение 1. *Целые числа x, y, z таковы, что $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z$. Доказать, что $x+y+z$ делится на 3.*

Задача 1. *Найдите все пары натуральных чисел m, n, для которых $\frac{(m+3n)^2}{m^2+n^2}$ является квадратом натурального числа.*

Задача 2. *Найдите все пары натуральных чисел a и b, что ab^2+b+7 делит a^2b+a+b.*

Задача 3. *Найдите все пары простых чисел p, q, что $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.*

Задача 4. *Решить в целых числах уравнение*

$$(x^2-y^2)^2 = 1+16y.$$

Задача 5. *Дано натуральное число $n > 1$ и простое число p такие, что $p-1$ делится на n, а n^3-1 делится на p. Докажите, что число $\sqrt{4p-3}$ является целым.*

Задача 6. *Найдите все пары простых чисел p, q, которые удовлетворяют равенству*

$$3p^q - 2q^{p-1} = 19.$$

Задача 7. *Найдите все натуральные n, для которых существуют натуральные m и k такие, что*

$$(n^2+2)^m = (2n-1)^k.$$

Задача 8. *Даны натуральные числа a и b такие, что $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший делитель чисел a и b не превосходит $\sqrt{a+b}$.*

Задача 9. *a, b — различные натуральные числа такие, что $ab(a+b)$ делится на a^2+ab+b^2. Докажите, что $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.*

Задача 10. *Назовём десятичное число интересным, если оно делится на 11111 и все его цифры различны. Сколько существует интересных чисел?*

Задача 11. *Дано натуральное число d. Докажите, что числа $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ не могут быть все вместе полными квадратами.*

Задача 12. *Натуральное число n можно представить в виде суммы двух квадратов как минимум двумя способами, то есть существуют такие натуральные числа s, t, u, v, что $n = s^2+t^2 = u^2+v^2$ и $s \geq t, u \geq v, s > u$. Доказать, что наибольший общий делитель чисел n и $su - tv$ меньше n.*

Задача 13. *Натуральные числа a, b, c, d таковы, что наименьшее общее кратное этих чисел равно $a+b+c+d$. Докажите, что $abcd$ делится на 3 или на 5.*

Задача 14. *Даны натуральные числа m и n. Докажите, что число 2^n-1 делится на $(2^m-1)^2$ тогда и только тогда, когда число n делится на число $m(2^m-1)$.*

Задача 15. *Найдите все тройки натуральных чисел m, n и l такие, что $m+n = (m,n)^2$, $n+k = (n,k)^2$, $k+m = (k,m)^2$. (через (a,b) обозначается наибольший общий делитель чисел a, b.)*