Занятие 2

Задача 1 Задачи 23.2,23.16, 23.17, 23.18, 23.19 из Зарубежные олимпиады (под редакцией Сергеева).

Задача 2 Для натурального n определим многочлен $\binom{x}{n} = \dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$. Докажите, что $\binom{x}{n}$ целозначный, т.е. в целых точках принимает целые значения. Используя этот факт и интерполяционную формулу Лагранжа, решите такую задачу: пусть $a_1, \dots, a_{n+1}$ различные натуральные числа. Определим $b_i = \prod_{j \neq i}(a_i - a_j)$. Докажите, что наименьшее общее кратное чисел $b_1, \dots, b_{n+1}$ делится на $n!$.

Задача 3 Пусть $f(x)$ — многочлен степени меньше n, $x_1, \dots, x_n$ — попарно различные комплексные числа. Покажите, что дробь $\dfrac{f(x)}{(x-x_1)\dots(x-x_n)}$ может быть представлена в виде суммы простейших: $\dfrac{A_1}{x-x_1} + \dots + \dfrac{A_n}{x-x_n}$. Покажите, что $A_j = \dfrac{f(x_j)}{g'(x_j)}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, где $g(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)$.

Задача 4 Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $k \geqslant 6$. Докажите, что если P в k целых точках принимает значения из $[1, k-1]$, то эти значения равны. Верно ли это для $k = 5$?

Задача 5 Докажите теорему Гаусса-Люка: корни производной многочлена принадлежат выпуклой оболочке корней многочлена. Следствие: если все корни многочлена лежат в верхней полуплоскости (мнимая часть больше 0), то все корни его производной также лежат в верхней полуплоскости.

Задача 6 Каким условиям должны удовлетворять действительные числа p, q, чтобы многочлен $x^3 + px + q$ имел три различных действительных корня?