III етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків

II тур

Умови та розв'язки по усіх класах

7 клас

1. Кожна школа делегувала рівно трьох учнів на районну олімпіаду. Андрій, Богдан та Олеся представляли ліцей "Кубик". Усіх учасників перед початком олімпіади вишукували в одну лінію і роздали послідовно зліва направо номери учасників. Андрій побачив, що перед ним стільки ж учасників, скільки й після нього. Виявилось, що обидва інших учасники з "Кубика" стоять за ним і мають номери: у Богдана – 19-й, а у Олесі – 28-й. Скільки шкіл у цьому районі? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 11.
Розв'язання. Нехай перед Андрійком стоїть x учасників, тоді після нього стільки ж, тобто загалом учасників $2x+1$. Оскільки Богдан стоїть за Андрієм, то перед ним є принаймні 18 учасників, тобто $x \le 17$, таким чином максимум є 35 учасників. Але їх так само не менше ніж 28, а внаслідок їх непарної кількості – не менше 29. Але, оскільки з кожної школи було рівно по 3 учасники, то їх кількість кратна 3. Між числами 28 та 35 є єдине непарне число, яке кратне 3 – це число 33. Таким чином усього було 33 учасники, тому шкіл у районі – 11.

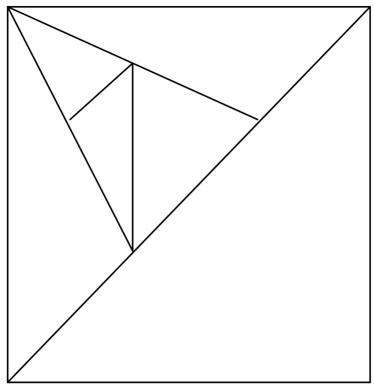


Рис.1

2. Розріжте квадрат на декілька трикутників таким чином, щоб кожний трикутник мав рівно три інших сусідніх трикутники. Два трикутники називаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону або спільний відрізок, який є частиною сторони. Якщо спільною є лише одна точка, то такі трикутники не вважаються сусідніми.

Відповідь: Таких розбиттів багато, на рис.1 зображений один з можливих варіантів.

3. Доведіть, що існує як завгодно багато натуральних чисел, у яких сума цифр самого числа дорівнює сумі цифр квадрату цього числа.

Розв'язання. Розглянемо для довільного натурального n число $10^n - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ цифр}}$. Очевидно, що його сума цифр $S = 9n$. Обчислимо квадрат цього числа:

$$(10^n-1)^2 = 10^{2n} - 2\cdot 10^n + 1 = 1\underbrace{00\ldots0}_{2n \text{ цифр}} - 2\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ цифр}} + 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n-1 \text{ цифра}}\ 8\ \underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ цифра}}\ 1.$$

Сума цифр цього числа так само дорівнює $9(n-1)+8+1 = 9n = S$, що й треба було довести.

4. У кожній з 2010 клітин, розставлених вздовж кола, записане деяке натуральне число. На деяку з клітин ставиться фішка. Далі ця фішка рухається за годинниковою стрілкою за таким правилом. Вона пересувається на кількість клітин, яка дорівнює числу, що записане у вихідній клітині, після чого на 1 збільшується число у клітині, куди ця фішка прибула. Далі вона знову рухається за тим самим правилом. Доведіть, що через деякий час фішка побуває в усіх клітинах хоча б по одному разу. Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Якщо фішка рухається достатньо довго, то настане момент, коли вона побуває у деякий клітині A принаймні 2010 разів. Нехай з самого початку там було написане деяке число n, тоді вона своїм першим ходом потрапляє у клітину B_1, що відстоїть по колу від клітині A на n позицій. Після другого попадання у клітину A там стане записаним число $n+1$, тому вона наступним ходом потрапить у клітину B_2, що відстоїть від клітині A на $n+1$ позицію, тобто у клітину, наступну за клітиною B_1. Після наступного попадання у клітину A там стане записаним число $n+2$ і фішка попаде у клітину B_2, наступну за клітиною B_1. І так далі, фішка буде послідовно попадати в усі клітини, починаючи з B_1. Таким чином після 2010 стрибків фішка послідовно потрапить в усі клітини, що й треба було довести.

<u>8 клас</u>

1. Задача 7.1

2. Олеся може писати на дошці натуральні числа за двома правилами. Для кожного натурального n, яке вже написане на дошці, вона може написати число $3n+13$. Якщо ж записане число є повним квадратом, то вона може також записати корінь з цього числа. Використовуючи лише ці два правила, чи може Олеся одержати:

   а) число 55, якщо вона починала з числа 256;

   б) число 256, якщо вона починала з числа 55?

   <u>Відповідь:</u> ***а)*** можна; ***б)*** не можна.

   <u>Розв'язання.</u> ***а)*** Достатньо вказати ланцюг, за яким проводиться одержання відповідного числа.

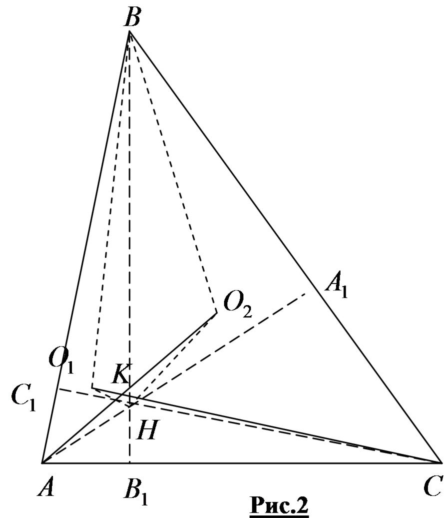
$$256 \xrightarrow{\sqrt{256}} 16 \xrightarrow{3\cdot16+13} 61 \xrightarrow{3\cdot61+13} 196 \xrightarrow{\sqrt{196}} 14 \xrightarrow{3\cdot14+13} 55.$$

   б) Розглянемо конгруенції за модулем 4. Повний квадрат повинен дорівнювати 0 або 1 за модулем 4. Але за першим правилом ми можемо одержати з числа вигляду $\equiv 3 \pmod 4$ число вигляду $\equiv 2 \pmod 4$, та навпаки, з числа $\equiv 2 \pmod 4$ можна одержати лише числа $\equiv 3 \pmod 4$. Зрозуміло, що, починаючи з числа $55 \equiv 3 \pmod 4$, ми не одержимо жодного разу повного квадрату, тому усі числа можна одержувати лише за першим правилом, але за ним не можна одержати бажане 256, оскільки воно кратне 4.

3. У гострокутному трикутнику ABC кут $\angle B = 30°$, точка H – точка перетину його висот. Позначимо через O_1, O_2 центри кіл, вписаних у трикутники ABH та CBH відповідно. Знайдіть у градусах величину кута між прямими AO_2 та CO_1.

   <u>Відповідь:</u> $45°$.

   <u>Розв'язання.</u> Розглянемо позначення, які наведені на рис.2, тобто висоти трикутника ABC позначимо AA_1, BB_1, CC_1, точку перетину прямих AO_2 та CO_1 позначимо через K. Оскільки $\angle BAA_1 = 60°$, то $\angle BO_1H = 90° + \frac{1}{2}\angle BAA_1 = 120°$, тому чотирикутник BO_1HC – вписаний, звідси $\angle O_1BH = \angle O_1CH$, аналогічно $\angle O_2BH = \angle O_2AH$. Тоді $\angle AKC = 180° - \angle KAC - \angle KCA = 180° - \angle HAC - \angle O_2AH - \angle HCA - \angle O_1CH$. Оскільки $\angle O_1CH + \angle O_2AH = 15°$, $\angle HAC + \angle HCA = 180° - \angle AHC = 30°$, то шуканий кут дорівнює $45°$.



<u>Рис.2</u>

4. Задача 7.4

9 клас

1. На дошці записано 16 послідовних натуральних чисел. Андрійко підрахував добуток записаних чисел, а Олеся – суму. Чи могло так трапитись, що у Андрійка та Олесі співпали

   а) три останніх цифри результату,

   б) чотири останніх цифри результату?

   Відповідь: ***а)*** так, могло; ***б)*** ні, не могло.

   Розв'язання. ***а)*** Нехай на дошці записані числа $a, a+1, a+2, \ldots, a+15$. У Олесі вийде число $16a + 8 \cdot 15 = 8(2a+15)$. Покажемо, що у Андрійка вийде число, що закінчується трьома нулями. Дійсно, серед 16 послідовних натуральних чисел обов'язково знайдуться 3, що діляться на 5, та 3, що діляться на 2. А тому добуток цих чисел ділиться на $2^3 \cdot 5^3 = 1000$.

   Число, що вийшло у Олесі, теж буде закінчуватись трьома нулями, якщо $2a + 15 \vdots 125$. Наприклад, якщо $a = 55$, то сума чисел у Олесі також закінчується трьома нулями.

   б) Аналогічно до розв'язку пункту а), помітимо, що у Андрійка вийде число, що ділиться на 16. А значить і число, утворене чотирма останніми цифрами результату, ділиться на 16. В той же час число, яке отримала Олеся, на 16 не ділиться, так само, як і число, утворене чотирма останніми цифрами результату.

2. Задача 8.2

3. Задача 8.3

4. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність:

$$\frac{a^2(b+c-a)}{b+c} + \frac{b^2(a+c-b)}{a+c} + \frac{c^2(b+a-c)}{b+a} \le \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

   Розв'язання. У процесі перетворень ми використовуємо нерівність між середніми:

$$\frac{a^2(b+c-a)}{b+c} + \frac{b^2(a+c-b)}{a+c} + \frac{c^2(b+a-c)}{b+a} =$$

$$= \frac{a \cdot a(b+c-a)}{b+c} + \frac{b \cdot b(a+c-b)}{a+c} + \frac{c \cdot c(b+a-c)}{b+a} \le$$

$$\le \frac{a}{b+c}\left(\frac{a+(b+c-a)}{2}\right)^2 + \frac{b}{a+c}\left(\frac{b+(a+c-b)}{2}\right)^2 + \frac{c}{b+a}\left(\frac{c+(b+a-c)}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{a(b+c)}{4} + \frac{b(a+c)}{4} + \frac{c(b+a)}{4} = \frac{ab+bc+ca}{2},$$

   що й треба було довести.

10 клас

1. Задача 9.1

2. У змаганні приймає участь 2010 програмістів. У кожному раунді усі програмісти поділяються на 2 команди, з рівною кількістю учасників. Знайдіть мінімальну кількість раундів, які повинні пройти, щоб кожні два програмісти принаймні у одному з раундів були у різних командах?

   Відповідь: 11 раундів.

   Розв'язання. Покажемо, що меншої кількості не вистачить. Будемо просто рахувати максимальну кількість програмістів, які грали у одній команді. Після першого раунду їх було 1005. Після кожного раунду знайдеться принаймні половина менше програмістів, які грали у одній команді, а тому за 10 раундів обов'язково залишиться принаймні 2 програмісти, які кожного разу грали у одній команді. Тепер покажемо, що за 11 раундів можна це зробити. Додамо до 2010 учасників 38 "мертвих душ", при цьому 19 з них додамо на початку списку, а 19 – наприкінці. І перенумеруємо їх номерами від 0 до 2047. Ці номери запишемо у двійковому розкладі, таким чином, щоб кожен номер мав 11 двійкових розрядів, якщо необхідно допишемо попереду потрібну кількість нулів. Тепер щодо поділення на команди – у k- му раунді програмісти розбиваються на команди у відповідності до k-ї двійкової цифри, до однієї команди ті, у яких ця цифра 0, до інших – у яких ця цифра 1. Очевидно, що команди будуть рівними, оскільки кількість учасників з 2048 мають однакову кількість 0 та 1 у k-му розряді. Крім того, серед віртуальних учасників також однакова кількість 0 та 1 у k-му розряді, оскільки вони мають симетричні номери за рахунок симетричного розташування у нумерації. Крім того, кожні два учасники мають номери, які відрізняються принаймні у одному розряді. У відповідному раунді вони й будуть грати у різних командах.

3. Задача 9.4

4. На площині задані точки $A \neq B$. Точка C рухається по площині таким чином, що $\angle ACB = \alpha$, де α – фіксований кут з проміжку $(0°, 180°)$. Вписане у $\triangle ABC$ коло має центр у точці I та дотикається сторін AB, BC, CA у точках D, E, F відповідно. Прямі AI та BI перетинають пряму EF у точках M та N відповідно. Покажіть, що:

   а) відрізок MN має постійну довжину;

   б) усі кола, описані навколо трикутників DMN, мають спільну точку.

   <u>Розв'язання</u>. а) Розглянемо $\triangle AFM$. $\angle AMF = 180° - \angle MFA - \angle FAM = 90° - \angle ECI - \angle FAM = 90° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle A) = \frac{1}{2}\angle B = \angle IBA$ (рис.3). Оскільки $\angle NIM = \angle AIB \Rightarrow \triangle NIM \sim \triangle AIB$. Зрозуміло, що $CI \perp MN$, тому маємо з подібності $\frac{MN}{BA} = \frac{IH}{ID} = \frac{IH}{IF} = \sin \angle EFI = \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow MN = BA \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = const$.

   б) Очевидно, що точки F, D симетричні відносно прямої AM. З подібності вище доведених трикутників $\angle IMD = \angle IBD$, тому $IMBD$ – вписаний чотирикутник, тому $\angle BMA = 90°$. Якщо P – середина відрізку AB, тому $\angle BPM = 2\angle BAM = \angle BAC$.
   Оскільки точки E, D симетричні відносно BN, то знову з урахуванням подібності наведених трикутників, ми маємо такі рівності: $\angle NMD = 2\angle IND = 2\angle IAB = \angle BAC$, тобто $\angle BPM = \angle MND$. Ому точки M, N, D, P – циклічні, тобто коло, що описане навколо $\triangle DMN$ проходять через точку P – середину відрізку AB, що й треба було довести.

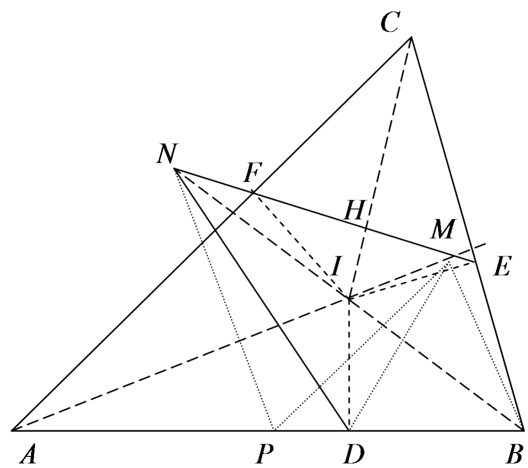


Рис.3

<u>11 клас</u>

1. На параболі $y = ax^2$ обрані дві точки A та B, Точка P – середину відрізку AB. У точках A та B до параболи проведено дотичні, які перетинаються в точці T. Доведіть, що середина відрізку PT належить параболі.

   <u>Розв'язання</u>. Нехай вибрані точки мають такі координати: $A(x_1, ax_1^2)$, $B = (x_2, ax_2^2)$, тоді $P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{ax_1^2+ax_2^2}{2}\right)$. Запишемо рівняння дотичних до цієї параболи у точках з абсцисами x_1, x_2 – це будуть прямі $y = 2ax_1x - ax_1^2$ та $y = 2ax_2x - ax_2^2$. Розв'яжемо цю систему та знайдемо T – точку перетину цих дотичних: $T\left(\frac{x_1+x_2}{2}, ax_1x_2\right)$. Середина відрізку PT, точка $M(x_M, y_M)$, має координати $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{ax_1^2+ax_2^2+2ax_1x_2}{4}\right)$. Неважко переконатись, що $y_M = ax_M^2$, що й треба було довести.

2. Задача 10.2

3. Знайти усі пари натуральних чисел $m, n > 1$, для яких $(n^3-1) \vdots (mn-1)$.

   Відповідь: пари натуральних чисел (k, k^2) та (k^2, k) при $k > 1$.

   Розв'язання. Нехай $(mn-1)|(n^3-1)$. Оскільки $(n^3-1)m - n^2(mn-1) = n^2 - m$, то $(mn-1)|(n^2-m)$. З іншого боку, $m(n^2-m) - (mn-1) = n^2 - m \Rightarrow (mn-1)|(m^2-n)$.

   Таким чином при $n > m^2$ маємо $mn - 1 \le n - m^2 \le n - 1$, що неможливо.

   Якщо $n = m^2$, то це є розв'язком задачі.

   Якщо $n < m^2$, та оскільки $mn - 1 \le n^3 - 1$, то $\sqrt{n} < m \le n^2$. Якщо $n^2 - m > 0$, то $mn - 1 \le n^2 - m < n^2 - 1$, тобто $m < n$, що неможливо, оскільки $mn - 1 \le m^2 - n < m^2 - 1$, тобто $n < m$. Залишається випадок $m = n^2$, який задовольняє умову.

   Таким чином відповіддю задачі будуть усі пари натуральних чисел (k, k^2) та (k^2, k) при $k > 1$.

4. Задача 10.4