ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 12 октября 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

3 1. Есть 99 палочек с длинами 1, 2, 3, ..., 99. Можно ли из всех этих палочек сложить контур какого-нибудь прямоугольника?

2. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя

2 а) ровно в шесть раз;

2 б) ровно в пять раз?

5 3. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K, а на стороне BC — точка L так, что $KB = LC$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P. Докажите, что отрезки DP и KL перпендикулярны.

5 4. С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её *неожиданной*, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3,4,2,5,5,5,2,3,4,3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четвёрка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок — по 10 пятерок, четверок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?

5. Даны N прямоугольных треугольников. У каждого выбрали по одному катету и нашли сумму их длин, затем нашли сумму длин оставшихся катетов, и, наконец, нашли сумму длин всех гипотенуз. Оказалось, что три найденных числа являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника. Докажите, что у всех исходных треугольников одно и то же отношение большего катета к меньшему, если

2 а) $N = 2$;

3 б) N — любое натуральное число, большее 1.

ТРИДЦЯТЬ ШОСТИЙ ТУРНІР МІСТ

Осінній тур,

8 – 9 класи, базовий варіант, 12 жовтня 2014 р.

(Підсумок підбивається за трьома задачами, за якими досягнуто найвищого результату. Бали за пункти однієї задачі додаються.)

бали	задачі	
3	1.	Є 99 паличок довжиною 1, 2, 3, ..., 99. Чи можна з усіх цих паличок скласти контур деякого прямокутника?
	2.	Чи існують такі десять попарно різних натуральних чисел, що їхнє середнє арифметичне більше за їхній найбільший спільний дільник
2	а)	рівно в шість разів;
2	б)	рівно в п'ять разів?
5	3.	На стороні AB квадрата $ABCD$ відмічено точку K, а на стороні BC — точку L так, що $KB = LC$. Відрізки AL та CK перетинаються в точці P. Доведіть, що відрізки DP і KL перпендикулярні.
5	4.	Протягом навчального року Андрій записував свої оцінки з математики. Отримуючи чергову оцінку (2, 3, 4 або 5), він називав її *несподіваною*, якщо до цього моменту вона зустрічалася рідкіше за кожну з інших можливих оцінок. (Наприклад, якби протягом року він отримав підряд оцінки 3,4,2,5,5,5,2,3,4,3, то несподіваними були б перша п'ятірка та друга четвірка.) За весь навчальний рік Андрій отримав 40 оцінок — по 10 п'ятірок, четвірок, трійок і двійок (невідомо, в якому порядку). Чи можна точно сказати, скільки оцінок були для нього несподіваними?
	5.	Дано N прямокутних трикутників. У кожному обрали по одному катету та знайшли суму їхніх довжин, потім знайшли суму довжин катетів, що залишилися, і, нарешті, знайшли суму довжин усіх гіпотенуз. Виявилося, що три знайдені числа є довжинами сторін деякого прямокутного трикутника. Доведіть, що всі вихідні трикутники мають одне й те саме відношення більшого катета до меншого, якщо
2	а)	$N = 2$;
3	б)	N — довільне натуральне число, більше за 1.

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 12 октября 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя

1 а) ровно в шесть раз;

2 б) ровно в пять раз?

2. Вершины треугольника обозначены буквами A, B, C по часовой
стрелке. Треугольник последовательно поворачивают по часовой
стрелке: сначала вокруг вершины A на угол, равный $\angle A$, потом —
4 вокруг вершины B на угол, равный $\angle B$, и так далее по циклу (ка-
ждый раз поворот делают вокруг текущего положения очередной
вершины). Докажите, что после шести поворотов треугольник займёт
исходное положение.

3. Даны 15 целых чисел, среди которых нет одинаковых. Петя записал
на доску все возможные суммы по 7 из этих чисел, а Вася — все
5 возможные суммы по 8 из этих чисел. Могло ли случиться, что они
выписали на доску одни и те же наборы чисел? (Если какое-то число
повторяется несколько раз в наборе у Пети, то и у Васи оно должно
повторяться столько же раз.)

4. Даны N прямоугольных треугольников ($N > 1$). У каждого выбрали
по одному катету и нашли сумму их длин, затем нашли сумму длин
оставшихся катетов, и, наконец, нашли сумму длин всех гипотенуз.
5 Оказалось, что три найденных числа являются длинами сторон не-
которого прямоугольного треугольника. Докажите, что все исходные
треугольники подобны.

5. На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо
добавляли одну золотую монету и записывали количество серебря-
ных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету
5 и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге
на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот мо-
мент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел
на втором.

ТРИДЦЯТЬ ШОСТИЙ ТУРНІР МІСТ

Осінній тур,

10 – 11 класи, базовий варіант, 12 жовтня 2014 р.

(Підсумок підбивається за трьома задачами, за якими досягнуто найвищого результату. Бали за пункти однієї задачі додаються.)

бали	задачі
	1. Чи існують такі десять попарно різних натуральних чисел, що їхнє середнє арифметичне більше за їхній найбільший спільний дільник
1	а) рівно в шість разів;
2	б) рівно в п'ять разів?
4	2. Вершини трикутника позначено літерами A, B, C за годинниковою стрілкою. Трикутник послідовно повертають за годинниковою стрілкою: спочатку навколо вершини A на кут, рівний $\angle A$, потім — навколо вершини B на кут, рівний $\angle B$, і так далі по циклу (кожен раз поворот роблять навколо поточного положення чергової вершини). Доведіть, що після шести поворотів трикутник повернеться у вихідне положення.
5	3. Дано 15 цілих чисел, серед яких немає однакових. Петрик записав на дошці усі можливі суми по 7 з цих чисел, а Василько — усі можливі суми по 8 з цих чисел. Чи могло так статися, що вони виписали на дошку одні й ті самі набори чисел? (Якщо якесь число повторюється декілька разів серед чисел, записаних Петриком, то й Василько мав записати його таку саму кількість разів.)
5	4. Дано N прямокутних трикутників ($N > 1$). У кожному обрали по одному катету та знайшли суму їхніх довжин, потім знайшли суму довжин катетів, що залишилися, і, нарешті, знайшли суму довжин усіх гіпотенуз. Виявилося, що три знайдені числа є довжинами сторін деякого прямокутного трикутника. Доведіть, що всі вихідні трикутники подібні.
5	5. На столі лежала купка срібних монет. На кожному кроці або додавали одну золоту монету та записували кількість срібних монет на перший папірець, або прибирали одну срібну монету та записували кількість золотих монет на другий папірець. Зрештою на столі залишилися лише золоті монети. Доведіть, що в цей момент сума всіх чисел на першому папірці дорівнювала сумі всіх чисел на другому.