53-тя Міжнародна математична олімпіада

Умови задач

Перший день

1. Нехай точка J — центр зовнівписаного кола ΔABC, яке дотикається до сторони BC трикутника. Позначимо точку дотику кола до сторони BC через M, а до прямих AB та AC — через K та L відповідно. Прямі LM і BJ перетинаються в точці F, а прямі KM і CJ перетинаються в точці G. Нехай S — точка перетину прямих AF та BC, а T — точка перетину прямих AG та BC. Доведіть, що точка M ділить відрізок ST навпіл.

2. Задано натуральне число $n \geqslant 3$ та додатні дійсні числа $a_2, a_3, ..., a_n$, причому відомо, що $a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n = 1$. Доведіть нерівність

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdot ... \cdot (1+a_n)^n > n^n.$$

3. Алла та Богдан грають у гру під назвою «Ти ж мене підманула». У правилах гри фігурують два натуральних числа k й n, відомих до початку гри обом гравцям.

Гра проходить так. Спершу Алла вибирає два натуральних числа x та N, які задовольняють умову $1 \leqslant x \leqslant N$. Вона повідомляє Богдану число N, але значення x тримає у таємниці. Богдан намагається дізнатися щось про число x у такий спосіб: він називає довільну множину S натуральних чисел (можливо, вже названу раніше) та питає Аллу, чи належить число x щойно названій множині. Богдан може змінювати множину S (і повторювати запитання) як завгодно багато разів. На кожне поставлене Богданом питання Алла повинна відразу ж відповісти «так» або «ні». При цьому вона може брехати як завгодно багато разів за єдиної умови: серед відповідей Алли на довільне $k+1$ послідовне питання хоча б одна відповідь має бути правдивою.

Після того як Богдан поставить Аллі стільки запитань, скільки йому потрібно, він повинен назвати деяку множину X, що містить не більше за n натуральних чисел. Якщо $x \in X$, то Богдан перемагає, інакше він програє.

Доведіть такі твердження:

а) Якщо $n \geqslant 2^k$, то Богдан може забезпечити собі перемогу.

б) Для довільного достатньо великого k знайдеться таке ціле число $n \geqslant 1{,}99^k$, при якому Богдан не зможе забезпечити собі перемогу.

Другий день

4. Знайдіть усі такі функції $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, для яких при довільних цілих значеннях a, b, c, що задовольняють умову $a+b+c=0$, справджується рівність

$$f^2(a) + f^2(b) + f^2(c) = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

5. Нехай ABC — прямокутний трикутник із прямим кутом C, а D — основа висоти, опущеної з вершини C на гіпотенузу. На висоті CD деяким чином позначили внутрішню точку X, на відрізку AX позначили точку K так, що $BK = BC$, а на відрізку BX позначили точку L, для якої $AL = AC$. Нехай M — точка перетину прямих AL і BK. Доведіть, що $MK = ML$.

6. Знайдіть усі натуральні числа n, для яких існують такі цілі невід'ємні числа $a_1, a_2, ..., a_n$, що

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + ... + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + ... + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Відповіді та розв'язання

Перший день

1. ***Розв'язання.*** Оскільки $KM \perp BJ$ (рис. 1), то пряма KM паралельна бісектрисі BB' кута $\angle ABC$. Тому $\angle BMK = \angle MBB' = \frac{1}{2}\angle ABC$. Аналогічно $\angle FMB = \frac{1}{2}\angle ACB$ (причому F обов'язково лежить із того ж боку від прямої BC, що й точка A).

Уведімо позначення $X = KM \cap FJ$. Із прямокутного трикутника FXM маємо

$$\angle XFM = 90^\circ - \angle FMB - \angle BMK = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Точки K та M симетричні відносно FJ, а промінь AJ — бісектриса кута $\angle BAC$. Звідси $\angle JFK = \angle JFM = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle JAK$, тобто точки F, A, J, K лежать на одному колі. А тоді $\angle JFA = \angle JKA = 90^\circ$, звідки випливає $SA \parallel KM$. Таким чином, чотирикутник $SKMA$ — трапеція або паралелограм. Також маємо $\angle SMK = \angle AKM$, тому $SKMA$ — рівнобедрена трапеція або прямокутник і, відповідно, $SM = AK$. Аналогічно отримуємо $TM = AL$. А оскільки $AK = AL$ як дві дотичні, проведені з однієї точки, то $SM = TM$.

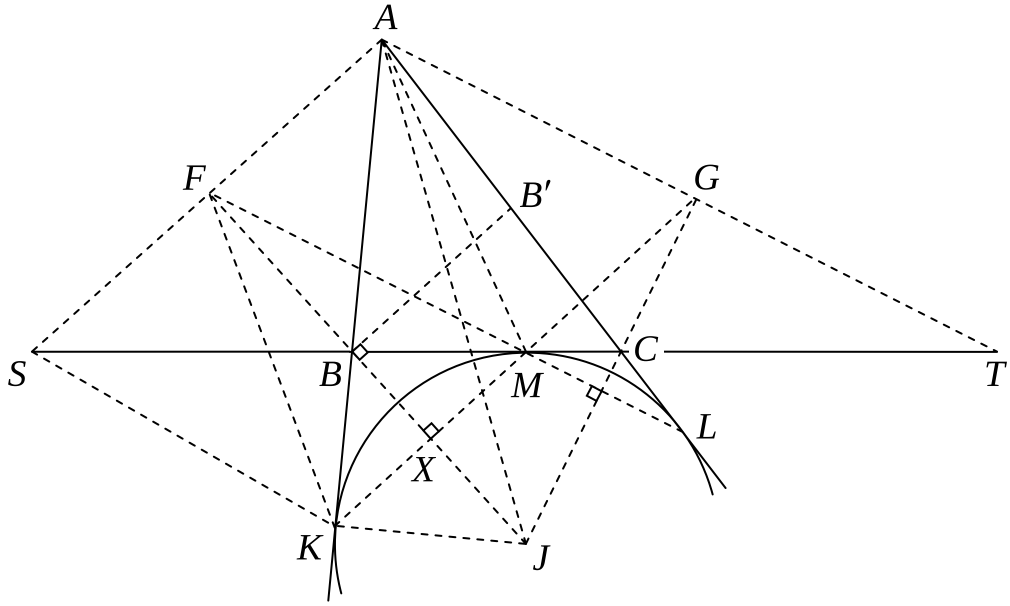

Рис. 1

2. ***Розв'язання.*** З нерівності між середніми можемо записати

$$(1+a_k)^k = \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \ldots + \frac{1}{k-1} + a_k\right)^k \geqslant k^k \cdot \frac{1}{(k-1)^{k-1}} \cdot a_k = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \cdot a_k.$$

До того ж рівність може досягатися лише за умови $a_k = \frac{1}{k-1}$.

Перемноживши нерівності такого вигляду для всіх значень k, $2 \leqslant k \leqslant n$, будемо мати

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdot \ldots \cdot (1+a_n)^n \geqslant \frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \frac{4^4}{3^3} \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = n^n.$$

При цьому рівність досягатися не може, оскільки за умови $a_k = \frac{1}{k-1}$, $2 \leqslant k \leqslant n$, ми мали би $a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \leqslant \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} < 1$.

3. ***Розв'язання.*** **а)** Нехай у деякий момент гри Богдану відома деяка множина, що складається з m елементів і гарантовано містить число x. Якщо $m > 2^k$, нижче покажемо, як Богдан може знайти нову множину, що складається з $m-1$ елемента і також гарантовано містить x. Враховуючи, що за умовами гри число x міститься у множині $T=\{1, 2, ..., N\}$, яка складається з N елементів (і Богдан про це знає), маємо один із двох варіантів:

— Якщо $N \leqslant 2^k$, то $N \leqslant 2^k \leqslant n$, тому Богдан, не питаючи нічого, може відразу назвати множину $X=T$ і виграти.

— Якщо $N > 2^k$, то Богдан за припущенням може послідовно зменшувати розмір множини, у якій гарантовано міститься число x, спершу до $N-1$, потім до $N-2$, …, а зрештою до 2^k елементів. Оскільки $2^k \leqslant n$, він може назвати множину, що містить 2^k елементів, і виграти.

Залишилося довести припущення про можливість переходу від m-елементної до $(m-1)$-елементної множини при $m > 2^k$.

Довільним чином занумеруємо всі елементи m-елементної множини T, яка містить x, цілими числами від 0 до $m-1$. Наприклад, можемо найменшому числу множини присвоїти номер 0, другому за величиною числу — номер 1, …, найбільшому — номер $m-1$. Відповідним чином позначимо самі елементи множини T як t_0, t_1, …, t_{m-1}.

Богдан повинен питати Аллу, чи її число належить одноелементній множині $\{t_{m-1}\}$, або доти, доки вона не відповість «так», або доти, доки Алла $k+1$ раз не відповість «ні». Якщо Алла $k+1$ раз відповіла «ні», то за умовою задачі одна з цих відповідей мала бути правдивою, тобто $x \neq t_{m-1}$. Таким чином, $(m-1)$-елементна множина, що складається з усіх чисел m-елементної множини T, крім t_{m-1}, гарантовано містить число x.

Припустимо тепер, що Алла відповіла «так» на одне з питань про множину $\{t_{m-1}\}$. Одразу після цього Богдан припиняє питати про множину $\{t_{m-1}\}$ і починає ставити такі k питань:

1) чи належить число x до підмножини чисел множини T, *перша* цифра двійкового запису номера яких дорівнює 0;
2) чи належить число x до підмножини чисел множини T, *друга* цифра двійкового запису номера яких дорівнює 0;

   …

k) чи належить число x до підмножини чисел множини T, *k-та* цифра двійкового запису номера яких дорівнює 0.

Після цього Богдан формує ціле число b, $0 \leqslant b \leqslant 2^k-1$, у такий спосіб:

1) першою цифрою у двійковому записі числа b є 1, якщо на питання про першу цифру Алла відповіла ствердно, або 0, якщо на питання про першу цифру Алла відповіла заперечно;
2) другою цифрою у двійковому записі числа b є 1, якщо на питання про другу цифру Алла відповіла ствердно, або 0, якщо на питання про другу цифру Алла відповіла заперечно;

   …

k) k-ю цифрою у двійковому записі числа b є 1, якщо на питання про k-ту цифру Алла відповіла ствердно, або 0, якщо на питання про k-ту цифру Алла відповіла заперечно.

Число x не може дорівнювати t_b, бо інакше вийшло би, що Алла збрехала $k+1$ раз поспіль. Справді, оскільки $b \leqslant 2^k-1 < m-1$, маємо $t_b \neq t_{m-1}$, тому Алла збрехала, коли сказала, що число $x=t_b$ міститься у множині $\{t_{m-1}\}$. А далі вона збрехала про першу, другу, …, k-ту цифру числа b.

Отже, $(m-1)$-елементна множина, що складається з усіх чисел множини T, крім t_b, гарантовано містить число x. Пункт а) задачі розв'язано.

б) Доведемо, що для довільного фіксованого натурального числа k і довільного фіксованого дійсного числа λ, $1<\lambda<2$, якщо $n=[(2-\lambda)\lambda^{k+1}]-1$, то Богдан не зможе забезпечити собі перемогу. Щоб із цього твердження одержати розв'язок задачі, достатньо підставити $\lambda = 1{,}995$ і довільне $k \geqslant \min\left\{2, \log_{1{,}995/1{,}99}\left(\dfrac{2}{0{,}005\cdot 1{,}995}\right)\right\}$. Тоді

$$n=[(2-\lambda)\lambda^{k+1}]-1=[0{,}005\cdot 1{,}995^{k+1}]-1>0{,}005\cdot 1{,}995^{k+1}-2=0{,}005\cdot 1{,}995\cdot\left(\frac{1{,}995}{1{,}99}\right)^k\cdot 1{,}99^k-2 \geqslant$$

$$\geqslant 0{,}005\cdot 1{,}995\cdot\frac{2}{0{,}005\cdot 1{,}995}\cdot 1{,}99^k-2=2\cdot 1{,}99^k-2 \geqslant 1{,}99^k+1{,}99^2-2>1{,}99^k \text{, тобто } n>1{,}99^k.$$

Побудуймо стратегію, якою може скористатися Алла при $n=[(2-\lambda)\lambda^{k+1}]-1$. Спершу вона вибирає $N=n+1$ і довільне $x \leqslant N$. Розглянемо для кожного числа i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, величину m_i, яка змінюється протягом гри і визначається таким чином: перед першим питанням Богдана

$$m_i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n+1;$$

після питання Богдана про те, чи належить x деякій множині S, величина змінюється за правилом

$$m_i = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \in S \text{ і Алла відповіла, що } x \in S, \text{ або якщо } i \notin S \text{ і Алла відповіла, що } x \notin S; \\ m_i + 1, \text{ якщо } i \in S \text{ і Алла відповіла, що } x \notin S, \text{ або якщо } i \notin S \text{ і Алла відповіла, що } x \in S. \end{cases}$$

Таким чином, у кожен момент гри m_x дорівнює кількості останніх питань, на які Алла відповіла нещиро. Стратегія, яку ми побудуємо, ніяк не спиратиметься на вибране Аллою число x і забезпечуватиме виконання нерівностей $m_i < k+1$ для кожного значення i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Це означатиме, що Богдану не вдасться з'ясувати, яке з чисел 1, 2, …, $n+1$ є відмінним від x, а тому він не зможе гарантувати собі перемогу. Також це означає, що незалежно від справжнього значення x протягом усієї гри виконуватиметься нерівність $m_x < k+1$, а отже, Алла ніколи не збреше $k+1$ раз поспіль.

Нагадаємо, що числа k та λ, $1 < \lambda < 2$, фіксовані, а $n=[(2-\lambda)\lambda^{k+1}]-1$. Стратегія Алли буде такою: на кожне питання вона вибирає таку відповідь, щоби після цієї відповіді значення функції

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i} = \lambda^{m_1} + \lambda^{m_2} + \ldots + \lambda^{m_{n+1}}$$

було не більшим, ніж якби вона відповіла інакше.

Доведемо методом математичної індукції, що якщо Алла дотримується такої стратегії, то після кожної її відповіді справджується нерівність $\varphi < \lambda^{k+1}$. Перед першою відповіддю $m_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, тому $\varphi = n+1 = [(2-\lambda)\lambda^{k+1}] \leqslant (2-\lambda)\lambda^{k+1} < \lambda^{k+1}$. Нехай тепер числа m_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, зафіксовано станом на деякий момент гри, причому за припущенням індукції $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i} < \lambda^{k+1}$. Якщо наступним ходом Богдан питає про деяку множину S, то після відповіді Алли функція φ набуде одного з двох значень:

— Якщо Алла відповість, що $x \in S$, то $\varphi = \varphi_1 = \sum_{i \in S} \lambda^0 + \sum_{i \notin S} \lambda^{m_i+1}$.

— Якщо Алла відповість, що $x \notin S$, то $\varphi = \varphi_2 = \sum_{i \notin S} \lambda^0 + \sum_{i \in S} \lambda^{m_i+1}$.

За умови, що Алла діятиме згідно з наведеною стратегією, нове значення функції можна оцінити так:

$$\varphi = \min\{\varphi_1, \varphi_2\} \leqslant \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i \in S} \lambda^0 + \sum_{i \notin S} \lambda^0 + \sum_{i \notin S} \lambda^{m_i+1} + \sum_{i \in S} \lambda^{m_i+1} \right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda^0 + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(n+1+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i} \right) \right) < \frac{n+1+\lambda\cdot\lambda^{k+1}}{2} = \frac{[(2-\lambda)\lambda^{k+1}]+\lambda^{k+2}}{2} \leqslant \frac{(2-\lambda)\lambda^{k+1}+\lambda^{k+2}}{2} = \lambda^{k+1}.$$

Отже, індукційний перехід здійснено і нерівність $\varphi < \lambda^{k+1}$ доведено. Залишається додати, що з $\varphi = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i} < \lambda^{k+1}$ випливає $m_i < k+1$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, а це й залишалося показати.

Другий день

4. ***Відповідь:*** $f(n) = kn^2$, $k \in \mathbb{Z}$;

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod 2, \\ k, & n \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod 4, \\ k, & n \equiv 1 \pmod 2, \\ 4k, & n \equiv 2 \pmod 4, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Розв'язання. Для зручності запишемо ще раз рівність з умови задачі:

$$f^2(a)+f^2(b)+f^2(c)=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$
Поклавши $a=b=c=0$, матимемо
$$3f^2(0)=6f^2(0) \;\Rightarrow\; f(0)=0.$$
Покладемо тепер $b=-a$, $c=0$:
$$f^2(a)+f^2(-a)=2f(a)f(-a) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (f(a)-f(-a))^2=0 \;\Rightarrow\; f(-a)=f(a).$$
Таким чином, функція f парна.
Припустимо, що $f(a)=0$ для деякого $a\in\mathbb{Z}$. Взявши для такого значення a довільне b і підставивши $c=-a-b$, отримаємо (враховуючи парність функції)
$$f^2(b)+f^2(a+b)=2f(b)f(a+b) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (f(b)-f(a+b))^2=0 \;\Rightarrow\; f(a+b)=f(b).$$
Отже, якщо для деякого $a\neq 0$ виконується рівність $f(a)=0$, то функція f періодична з періодом a.
Покладімо тепер $a=b=1$, $c=-2$:
$$2f^2(1)+f^2(2)=2f^2(1)+4f(1)f(2) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(2)(f(2)-4f(1))=0.$$
Тож або $f(2)=0$, або $f(2)=4f(1)$. Якщо $f(2)=0$, то згідно з наведеними вище міркуваннями функція f періодична з періодом 2, тобто має вигляд
$$f(n)=\begin{cases}0, & n\equiv 0 \pmod 2,\\ k, & n\equiv 1 \pmod 2,\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}.$$
У тому, що для довільного цілого k функція такого вигляду справді задовольняє умову задачі, можна переконатися, підставивши у початкову рівність три довільних парних числа або одне парне число і два непарних (інші комбінації не можуть дати суму 0). Надалі ж ми вважатимемо, що $f(2)\neq 0$ і, відповідно, $f(2)=4f(1)$. Для зручності позначимо $f(1)=k$, $f(2)=4k$, $k\neq 0$.
На даний момент ми отримали, що $f(i)=ki^2$ для $i\in\{0,1,2\}$. Припустимо, що $f(i)=ki^2$ для $i\in\{0,1,...,n\}$, $n\geqslant 2$. Поклавши у початкову рівність значення $a=1$, $b=n$, $c=-n-1$, дістанемо
$$k^2+k^2n^4+f^2(n+1)=2k^2n^2+2kn^2f(n+1)+2kf(n+1) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f^2(n+1)-(2kn^2+2k)f(n+1)+(k^2+k^2n^4-2k^2n^2)=0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f^2(n+1)-2k(n^2+1)f(n+1)+k^2(n^2-1)^2=0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(n+1)=\frac{2k(n^2+1)\pm\sqrt{4k^2(n^2+1)^2-4k^2(n^2-1)^2}}{2}=$$
$$=k(n^2+1)\pm\sqrt{k^2\left((n^2+1)^2-(n^2-1)^2\right)}=$$
$$=k(n^2+1)\pm\sqrt{k^2\cdot 4n^2}=k(n^2+1)\pm 2kn=k(n\pm 1)^2.$$
Якщо для всіх значень n в одержаній щойно рівності $f(n+1)=k(n\pm1)^2$ стоїть знак «$+$», то маємо $f(n)=kn^2$, $n\geqslant 0$, а внаслідок парності функції f, $f(n)=kn^2$, $n\in\mathbb{Z}$. Те, що така функція задовольняє умову задачі, покажемо пізніше.
Якщо ж $f(n+1)=k(n-1)^2$ для деякого n, то, згідно з припущенням, що $f(n-1)=k(n-1)^2$, маємо $f(n+1)=f(n-1)$. Враховуючи це, внаслідок підстановки $a=n+1$, $b=1-n$, $c=-2$ отримаємо
$$f^2(n+1)+f^2(n-1)+f^2(2)=2f(n+1)f(n-1)+2f(n-1)f(2)+2f(2)f(n+1) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f^2(2)=4f(n-1)f(2) \;\Rightarrow\; 4f(n-1)=f(2)=4k \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; k(n-1)^2=k \;\Rightarrow\; (n-1)^2=1 \;\Rightarrow\; n=2.$$
Звідси $f(3)=f(1)=k$.
Підставмо тоді значення $a=1$, $b=3$, $c=-4$:
$$2k^2+f^2(4)=2k^2+4kf(4) \;\Rightarrow\; f(4)(f(4)-4k)=0.$$
Якщо $f(4)\neq 0$, то $f(4)=4k=f(2)$. Покладемо $a=b=2$, $c=-4$:

$$2f^2(2)+f^2(4)=2f^2(2)+4f(2)f(4) \Rightarrow f(4)(f(4)-4f(2))=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(4)=4f(2) \Rightarrow f(4)=f(2)=0.$$

Дістали суперечність. Отже, $f(4)=0$, тобто функція періодична з періодом 4. Тоді, враховуючи, що $f(3)=f(-1)=f(1)=k$, вона має вигляд

$$f(n)=\begin{cases}0, & n\equiv 0 \pmod 4,\\ k, & n\equiv 1 \pmod 2,\\ 4k, & n\equiv 2 \pmod 4,\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Те, що довільна функція такого вигляду задовольняє умову задачі, можна перевірити, перебравши всі можливі комбінації остач за модулем 4, що мають суму 0, і підставивши відповідні цим остачам значення функції у рівність з умови задачі. А конкретно замість $f(a)$, $f(b)$ та $f(c)$ потрібно підставити трійки чисел (0, 0, 0), (0, k, k), (0, 4k, 4k), (k, k, 4k) і переконатися, що жодна з них не порушує задану рівність.

Залишається пересвідчитися, що функція $f(n)=kn^2$, $k\in\mathbb{Z}$, також підходить. Це справді так, бо для довільних цілих a та b і $c=-a-b$

$$f^2(a)+f^2(b)+f^2(c)=k^2\left(a^4+b^4+(a+b)^4\right)=k^2(2a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+2b^4)=$$
$$=k^2(2a^2b^2+2a^4+2a^2b^2+4a^3b+4ab^3+2a^2b^2+2b^4)=k^2(2a^2b^2+2(a^2+b^2)(a^2+2ab+b^2))=$$
$$=k^2\left(2a^2b^2+2(a^2+b^2)(a+b)^2\right)=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$

5. ***<u>Розв'язання</u>.*** Нехай точка C' симетрична до точки C відносно прямої AB (рис. 2). Побудуємо коло ω_1 з центром у точці A і радіусом $AL=AC=AC'$, а також коло ω_2 з центром у точці B і радіусом $BK=BC=BC'$. Позначимо через K_1 другу точку перетину прямої AK з колом ω_2, а через L_1 — другу точку перетину прямої BL із колом ω_1. Застосувавши <u>теорему про степінь точки</u> до точки X відносно кіл ω_2 та ω_1, матимемо

$$XK\cdot XK_1=XC\cdot XC'=XL\cdot XL_1.$$

Отже, точки K, L, K_1 та L_1 лежать на одному колі, яке позначимо як ω_3. Оскільки $\angle ACB=90^\circ$, пряма AC — дотична до кола ω_2, тому

$$AL^2=AC^2=AK\cdot AK_1.$$

Але це означає, що AL у точці L дотикається до ω_3. Аналогічно до ω_3 у точці K дотикається пряма BK. Таким чином, MK та ML — дотичні відрізки до одного кола, проведені з точки M. Звідси й випливає, що вони рівні.

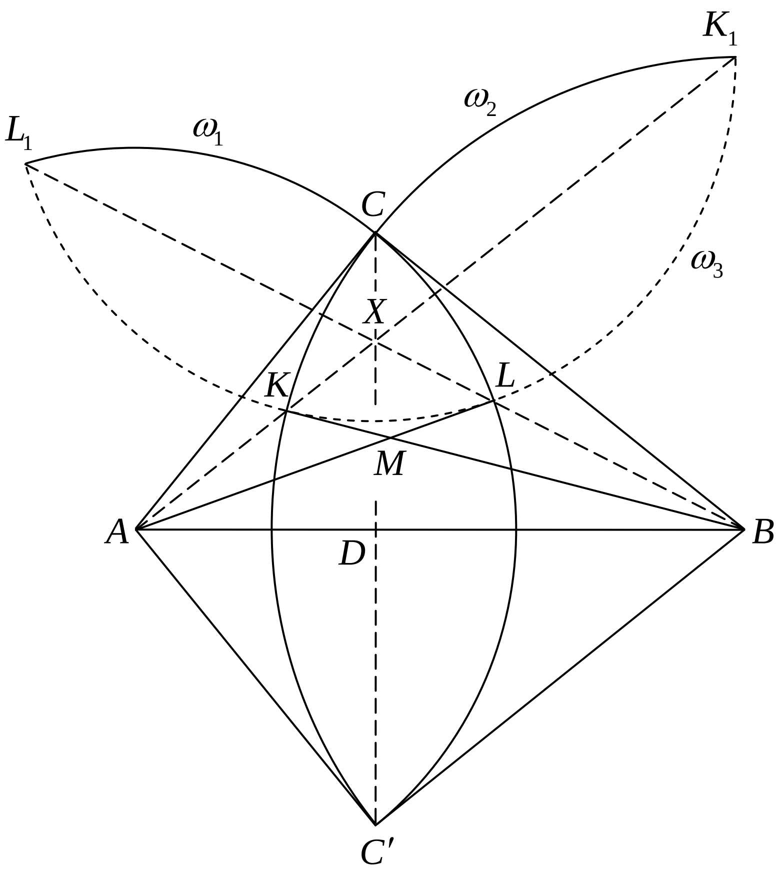

Рис. 2

6. ***<u>Відповідь</u>:*** $n\equiv 1 \pmod 4$ або $n\equiv 2 \pmod 4$.

<u>Розв'язання</u>. Нехай для деякого натурального n існують такі цілі невід'ємні числа $a_1, a_2, ..., a_n$, що $\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+...+\frac{n}{3^{a_n}}=1$. Помножимо обидві частини рівності на 3^m, де $m=\max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$:

$$1\cdot 3^{m-a_1}+2\cdot 3^{m-a_2}+...+n\cdot 3^{m-a_n}=3^m.$$

З огляду на вибір числа m усі значення $m-a_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, невід'ємні. А оскільки степені трійки непарні, ліворуч у рівності стоїть число тієї ж парності, що й сума $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Праворуч стоїть непарне число 3^m, а значить, для справдження рівності необхідно, щоб число $\frac{n(n+1)}{2}$ було непарним. Підставивши послідовно $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$ та $n=4k+3$, де k — ціле невід'ємне число, переконаємось, що перший та останній варіанти не підходять. Отже, необхідною умовою виконання рівності є $n\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)$ або $n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\, 4)$. Доведемо, що це також і достатня умова, тобто для довільного натурального n, яке при діленні на 4 дає остачу 1 або 2, можна дібрати такі цілі невід'ємні числа $a_1, a_2, ..., a_n$, щоб виконувалися рівності

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+...+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+...+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$

Нехай $b_1, b_2, ..., b_n$ — деяка послідовність натуральних чисел. Якщо існують цілі невід'ємні показники $a_1, a_2, ..., a_n$, для яких

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+...+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{b_1}{3^{a_1}}+\frac{b_2}{3^{a_2}}+...+\frac{b_n}{3^{a_n}}=1,$$

то набір чисел $b_1, b_2, ..., b_n$ назвемо підхожим. Наша задача, таким чином, довести, що послідовність чисел 1, 2, …, n є підхожим набором.

Нехай k, $1\leqslant k\leqslant n$, — деякий індекс, а u та v — натуральні числа, сума яких дорівнює $3b_k$. Запишемо дві очевидні рівності:

$$\frac{1}{2^{a_k+1}}+\frac{1}{2^{a_k+1}}=\frac{1}{2^{a_k}},\ \frac{u}{3^{a_k+1}}+\frac{v}{3^{a_k+1}}=\frac{b_k}{3^{a_k}}.$$

Із цих рівностей випливає, що якщо $b_1, b_2, ..., b_n$ — підхожий набір, якому відповідають показники $a_1, a_2, ..., a_n$, а $u+v=3b_k$, то й набір чисел $b_1, b_2, ..., b_{k-1}, u, v, b_{k+1}, ..., b_n$ також є підхожим із показниками $a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k+1, a_k+1, a_{k+1}, ..., a_n$. Сформулюємо це саме твердження інакше: якщо два члени u та v деякої послідовності замінили одним числом $\frac{u+v}{3}$ і внаслідок цього утворився підхожий набір, то й початковий набір чисел був підхожим. Отже, щоби довести підхожість послідовності 1, 2, …, n, нам достатньо шляхом замін вигляду $\{u, v\}\to\frac{u+v}{3}$ звести цю послідовність до єдиного числа 1, яке, очевидно, становить одноелементний підхожий набір із показником $a_1=0$.

Зауважимо, що якщо обидва числа k та $2k$ на деякому кроці належать послідовності, то їх можна замінити на число $\frac{k+2k}{3}=k$, тобто фактично відкинути число $2k$.

Хай $n\geqslant 16$. Покажемо, як за 12 операцій прибрати з послідовності 1, 2, …, n останні 12 чисел. Розпишемо n як $n=12k+r$, де $k\geqslant 1$ і $0\leqslant r\leqslant 11$.

Якщо $0\leqslant r\leqslant 5$, то останні 12 членів послідовності можна розбити на такі 6 пар:

- r пар вигляду $\{12k-i, 12k+i\}$, $1\leqslant i\leqslant r$;
- $5-r$ пар вигляду $\{12k-6-i, 12k-6+i\}$, $1\leqslant i\leqslant 5-r$;
- пара чисел $12k$ і $12k-6$.

Спершу ми відкинемо число $12k$ (це можна зробити, бо послідовність, очевидно, містить удвічі менше за нього число $6k$), далі відкинемо $12k-6$ (це можливо, бо послідовність містить $6k-3$). Потім ми замінимо всі пари вигляду $\{12k-i, 12k+i\}$ на числа $8k$, а всі пари вигляду $\{12k-6-i, 12k-6+i\}$ на числа $8k-4$. Залишається відкинути 5 утворених чисел (кожне з яких дорівнює $8k$ або $8k-4$). Це дійсно можна зробити, оскільки числа $\frac{8k-4}{2}=4k-2$ та $\frac{8k}{2}=4k$ досі містяться у нашій послідовності: протилежне означало б, що число $4k$ належить до останніх 12 членів послідовності (бо ми чіпали лише їх). Але тоді мали би

$$4k>n-12=12k+r-12 \iff 8k+r<12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ k=1,\ r<4\ \Rightarrow\ n=12k+r<16,$$

а це прямо суперечить припущенню про величину числа n.

Випадок $6\leqslant r\leqslant 11$ аналогічний. У цьому випадку останні 12 членів послідовності можна розбити на такі 6 пар:

- $11-r$ пар вигляду $\{12k-i,12k+i\}$, $1\leqslant i\leqslant 11-r$;
- $r-6$ пар вигляду $\{12k+6-i,12k+6+i\}$, $1\leqslant i\leqslant r-6$;
- пара чисел $12k$ і $12k+6$.

Спершу відкидаємо число $12k+6$, потім відкидаємо $12k$. Далі замінюємо всі пари вигляду $\{12k-i,12k+i\}$ на числа $8k$, а всі пари вигляду $\{12k+6-i,12k+6+i\}$ на числа $8k+4$. Залишається відкинути утворені числа $8k$ та $8k+4$. Це можна зробити, оскільки $4k+2\leqslant n-12$. Якби це було не так, то знов одержали би суперечність:

$$4k+2>n-12=12k+r-12\ \Leftrightarrow\ 8k+r<14\ \Rightarrow\ r<6.$$

Нехай тепер $2\leqslant n\leqslant 15$. Ураховуючи, що нас цікавлять тільки ті n, які дають остачу 1 або 2 у разі ділення на 4, залишаємо варіанти $n\in\{2,5,6,9,10,13,14\}$. Причому якщо $n\in\{2,6,10,14\}$, то найбільше число послідовності (а са́ме число n) парне, тому можемо відразу відкинути його і перейти до одного з випадків $n\in\{1,5,9,13\}$. Отже, лишається розглянути варіанти $n=5$, $n=9$ та $n=13$.

— Якщо $n=5$, робимо такі операції (числа, над якими на поточному кроці проводять операцію, взято у фігурні дужки): 1, 2, 3, {4, 5} $\rightarrow$ 1, 2, {3, 3} $\rightarrow$ {1, 2}, 2 $\rightarrow$ {1, 2} $\rightarrow$ 1.

— Якщо $n=9$: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, {3, 6} $\rightarrow$ 1, 2, 4, {5, 7}, 8, 9, 3 $\rightarrow$ 1, 2, 4, {4, 8}, 9, 3 $\rightarrow$ 1, 2, 4, 4, {9, 3} $\rightarrow$ 1, {2, 4}, 4, 4 $\rightarrow$ 1, {2, 4}, 4 $\rightarrow$ 1, {2, 4} $\rightarrow$ {1, 2} $\rightarrow$ 1.

— Якщо $n=13$, спершу прибираємо з послідовності чотири останніх числа, замінивши пару чисел {11, 13} на число 8, відкинувши цю вісімку, а також числа 10 і 12. Далі діємо, як у випадку $n=9$.