Каникулы 2011-2012. Для решения некоторых задач вам могут понадобиться простейшие факты из линейной алгебры. Пишите в google «library genesis», потом, например, линейная алгебра, и выбирайте книжку попроще, с примерами. Вам нужно несколько первых параграфов (системы векторов, линейная зависимость, базис, размерность).

ВЫ ДОЛЖНЫ ЗНАТЬ СЛЕДУЮЩЕЕ: пусть F — поле. Обозначим F^n множество n-ок $x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in F$.

(1) Понятие линейно независимой системы векторов $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$.
(2) Если $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ линейно независимы, то $m \leqslant n$ (это желательно уметь доказывать).
(3) В простейших случаях $F = R$, $n = 2, 3, 4$ уметь проверять, является ли заданная система векторов линейно зависимой.
(4) Вспомнить определение скалярного произведения в R^n. Можно ли его перенести на F^n? Можно ли с помощью скалярного произведения дать какой то простой признак линейной независимости (например, если в R^n вектора попарно ортогональны, то они линейно независимы)?

Задача 1. Последовательность $a_n, n \geqslant 1$ определена так: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 24$ и $a_n = \dfrac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}$ при $n \geqslant 4$. Докажите, что для произвольного n число a_n целое и делится на n.

Задача 2. Последовательность $a_n, n \geqslant 0$ определена так: $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ и $a_n a_{n+3} - a_{n+1}a_{n+2} = n!$ при $n \geqslant 0$. Докажите, что все a_n являются целыми.

Следующие задачи по комбинаторике.

Задача 3. Найти все n для которых квадрат можно разбить на n треугольников одинаковой площади.

Задача 4. Пусть r, s — натуральные числа. Докажите, что каждая последовательность из $rs+1$ различных действительных чисел содержит или возрастающую подпоследовательность длины $r + 1$, или убывающую подпоследовательность длины $s + 1$. Напомним, что если $a_1, \dots, a_n$ — последовательность, то её подпоследовательность — $a_{i(1)}, \dots, a_{i(k)}$, где $i(1) < \dots < i(k)$.

Задача 5. Будем говорить, что множество S целых чисел свободно от сумм, если $x+y \notin S$ для произвольных $x, y \in S$. Докажите, что каждое множество из n ненулевых целых чисел содержит подмножество, свободное от сумм, в котором не менее $n/3$ чисел.

Задача 6. Какова максимальная площадь треугольника, содержащегося в единичном квадрате? Какова минимальная площадь треугольника, содержащего единичный квадрат?

Задача 7. Докажите, что каждый выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить в прямоугольник площади 2.

Задача 8. Пусть G — граф с множеством вершин V. Далее $d(v)$ обозначает степень v. Подмножество $V' \subset V$ называется независимым, если произвольные две вершины из V' не соединены. Докажите, что G содержит хотя бы $\sum_{v\in V}\dfrac{1}{d(v)+1}$ независимых вершин.

Задача 9. Есть n человек, у каждого из которых есть своя новость (и эта новость неизвестна другим). Когда один звонит другому, они обмениваются всеми новостями, которые знают. Какое наименьшее число звонков нужно, чтобы каждый человек узнал все новости?

Задача 10. Докажите, что каждый неориентированный граф можно ориентировать (т.е. выбрать направление на каждом ребре) так, что для произвольной вершины число входящих стрелок отличается от числа выходящих не более чем на 1.

Задача 11. Пусть D — подмножество плоскости. Определим диаметр $diam(D) = \sup_{x,y\in D} d(x,y)$, где $d(x,y)$ обозначает расстояние между x, y. Докажите, что если $diam(D) \leqslant 1$, то D можно поместить в правильный шестиугольник с длиной стороны $1/\sqrt{3}$.

Выведите отсюда, что D можно разбить на 3 подмножества, диаметры которых не превосходят $\sqrt{3}/2$.

Задача 12. Таблица $n \times n$ заполнена числами $1, 2, \ldots, n^2$. Докажите, что есть два соседних числа (клетки имеют общую сторону), которые отличаються как минимум на n.

Можно ли n заменить большим числом?

Задача 13. Таблица $2k \times 2k$ заполнена числами $1, 2, \ldots, 4k^2$. Найдите наибольшее возможное $c = c(k)$, такое, что обязательно есть два числа, находящиеся в одном рядке или столбце, отличающиеся как минимум на $c(k)$. Например, $c(1) = 2$.

Задача 14. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — n точек на плоскости. Докажите, что существует точка P, обладающая следующим свойством: для произвольной прямой l, проходящей через P, в каждой из двух замкнутых полуплоскостей, на которые прямая l разбивает R^2, находится хотя бы $n/3$ точек P_i.

Задача 15. Пусть $d \geqslant 3$. Докажите, что в графе, максимальная степень вершин которого равна d, существует не более $(e(d-1))^n$ связных индуцированных подграфов на $n+1$ вершине, одной из которых является фиксированная вершина.

Напомним, что e — число e, индуцированный подграф — получается из данного графа выкидыванием некоторых вершин (и рёбер, выходящих из них).

Задача 16. Пусть $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ — набор подмножеств множества $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$, причём для произвольных $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, выполнено $|E_i \cap E_j| = \lambda \geqslant 1$ (λ не зависит от i, j). Докажите, что $n \leqslant m$.

Задача 17. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — точки на плоскости.

(1) Докажите, что для некоторой точки P_i среди расстояний $P_iP_j, j \neq i$ есть как минимум $\left(n - \dfrac{3}{4}\right)^{1/2} - \dfrac{1}{2}$ различных чисел.

(2) какое максимальное число раз может встречаться наибольшее расстояние между этими точками? (рассматриваются все пары точек P_rP_s)

(3) Докажите, что минимальное расстояние между данными точками (рассматриваются все пары P_rP_s, $r \neq s$) встречается не более $3n - 6$ раз. Попробуйте доказать более сильную оценку — минимальное расстояние встречается не более $3n - cn^{1/2}$ раз, где $c > 0$ — абсолютная постоянная, т.е. не зависит от n.

Задача 18. В городе Нечётном n жителей. В этом городе есть несколько клубов. В каждом клубе нечётное число человек. Оказалось, что для произвольных двух различных клубов число их общих членов чётно. Какое наибольшее число клубов в городе Нечётном?

Задача 19. В городе Равном живут n мужчин и n женщин. В этом городе есть несколько клубов. Каждый клуб имеет одинаковое число мужчин и женщин. Все клубы имеют различные множества членов. Кроме того, для произвольных двух клубов, количество общих мужчин равно количеству общих женщин. Какое наибольшее число клубов может быть в городе Равном?

Задача 20. Для бруса (паралелепипеда) $B = a \times b \times c$ определим его линейную меру $l(B) = a + b + c$. Пусть B содержится в брусе C. Верно ли, что $l(B) \leqslant l(C)$?