

Комбинаторика. Конструкции

1. Назовём треугольник *большим*, если все его стороны больше 1.
 - (a) Докажите, что из правильного треугольника со стороной 3 можно *вырезать* 100 больших треугольников.
 - (b) (*) Докажите, что правильный треугольник со стороной 3 можно *разрезать* на 100 больших треугольников.
2. (*) На плоскости задано несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести ещё несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли можно это сделать?
3. Множество A состоит из натуральных чисел. Его наибольший элемент — 100, а наименьший — 1. Каждый элемент A , кроме 1, равен сумме двух (возможно равных) чисел, которые принадлежат A . Какое наименьшее число элементов может быть в A ?
4. Последовательность целых чисел $a_0 = 0, a_1, \dots, a_n$ называется квадратной, если

$$|a_1 - a_0| = 1^2, |a_2 - a_1| = 2^2, \dots, |a_n - a_{n-1}| = n^2.$$

Докажите, что для каждого натурального k найдётся квадратная последовательность, которая содержит k .

5. Есть четыре краски и бесконечно много квадратных плиточек со стороной 1. Разрешается окрашивать стороны плиточек так, чтобы цвета всех сторон у каждой плиточки были разные, и приклеивать плиточки друг к другу сторонами одного цвета. Для каких натуральных m, n можно из этих плиточек склеить прямоугольник $m \times n$, у которого каждая сторона покрашена одним цветом и цвета у всех сторон разные?