Комбинаторика

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

1 Биномиальные коэффициенты

1. Бином Ньютона
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}.$$

2. $$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

3. $$C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}.$$

4. Рассмотрим все r-элементные подмножества множества $1, 2, \dots, n$, где $1 \le r \le n$. Докажите, что среднее арифметическое наименьших элементов всех подмножеств равно $\frac{n+1}{r+1}$.

2 Индукция

1. В куче лежит n камней. Вася проделывает следующую операцию: произвольную из уже имеющихся куч (в которой больше 1 камня) он разделяет на две части и прибавляет к уже имеющемуся числу произведение количеств камней в кучах, на которые он разделил. Докажите, что при любом способе разбиения куч в конце выйдет одно и то де число.

2. Пускай π — перестановка множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим через $z(\pi)$ количество циклов в этой перестановке. Докажите, что
$$\sum_{\pi} 2^{z(\pi)} = (n+1)!.$$

3. Дано n-элементное множество и 2^{n-1} его подмножество. Известно, что у любых трёх подмножеств есть общий элемент. Докажите, что у всех подмножеств есть ровно один общий элемент.

3 Подсчёт двумя способами

1. $$C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}.$$

2. $$2 \cdot 1 \cdot C_n^2 + 3 \cdot 2 \cdot C_n^3 + \dots + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}.$$

3. $$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

4. Пускай $p_n(k)$ — количество перестановок $\{1, 2, \dots, n\}$ с k фиксированными точками. Докажите, что
$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!.$$

5. На плоскости отмечено 50 точек, никакие три з которых не лежат на одной прямой. Их покрасили в 4 цвета. Докажите, что будет минимум 130 одноцветных разносторонних треугольников на этих вершинах
6. На плоскости отмечено 2009 точек. Часть из них покрашено в синий цвет, остальные — в красный. Известно, что на каждой единичной окружности с центром в синей точке лежит ровно 2 красные. Найдите наибольшее возможное количество синих точек.
7. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве целых чисел, не превосходящих по модулю 1000. Обозначим через m число пар (x, y), для которых $f(x) = g(y)$, через n — для которых $f(x) = f(y)$, через k — для которых $g(x) = g(y)$. Докажите, что $2m \leq n + k$.
8. Дано n точек на плоскости. Докажите, что можно выбрать их подмножесто из не менее, чем $\sqrt{n}$ элементов такое, что среди треугольников с вершинами в точках этого подмножества нету ни одного правильного.
9. Многоугольник, у которого сторон больше 3, разрезали непересекающимися диагоналями на треугольники. Пускай x — количество получившихся треугольников, две стороны которых являются сторонами многоугольника. y — количество треугольников, одна сторона которых является стороно многоугольника, а z — количество треугольников, что никакие их стороны не являются сторонами многоугольника. Докажите, что
$$x = z + 2.$$
10. На плоскости отмечено n точек общего положения. Докажите, что треугольников площади 1 с вершинами в этих точках не больше
$$\frac{2}{3}(n^2 - n).$$
11. На вечеринку пришли n человек. Каждые два из них — либо знакомы, либо нет. Какое наибольшее количество пар незнакомцев, у которых есть общий друг, может быть?
12. На фестиваль приехали 8 певцов. Организаторы хотят составить расписание концертов так, что в каждом концерте выступало по 4 певца и любая пара певцов участвовала в одинаковом количестве концертов. Найдите минимальное возможное количество концертов.
13. В компании $2N$ мальчиков и 6 девочек. Известно, что для любой пары девочек существует ровно N мальчиков, которые знакомы с одно и не знакомы с другой девочкой. Докажите, что количество мальчиков, знакомых со всеми девочками, не превышает
$$\frac{N}{3}.$$
14. В школе учится 2007 мальчиков и 2007 девочек. Каждый школьник ходит не более, чем на 100 кружков. Известно, что любая пара (девочка и мальчик) ходят в один общий для них кружок. Докажите, что на какой-то кружок ходит минимум 11 мальчиков и 11 девочек.
15. n школьников ходят на кружки. Известно, что на каждый кружок ходит минимум 2 школьника. Также, если в двух кружках есть хотя бы два общих школьника, то количество школьников, которые ходят в них, разная. Докажите, что классов не более, чем $(n-1)^2$.
16. На вечеринке было $12k$ людей. Каждый пожал руку $3k + 6$ людям. Также известно, что для любой пары количество людей, поприветствовавших обоих, одинаково. Сколько человек было на вечеринке?
17. В Думе 1600 депутатов, которые образовали 16000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдётся два комитета, в которых не менее 4 общих членов.
18. В классе a мальчиков и b девочек. Каждый мальчик считает каждую девочку либо умной, либо красивой. Предположим, что оценки любой пары мальчиков совпадают не больше, чем для k девочек. Докажите, что $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.