Навколо теорем Ферма і Вільсона. В очікуванні теореми Ейлера

1. $p \in \mathbb{P}$, $(a, p) = 1$, тоді числа
$$a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$$
дають різні остачі при діленні на p.

2. $p \in \mathbb{P}$, $(a, p) = 1$. Довести, що існує таке число $b \in \mathbb{N}$, що $ab \equiv 1 \pmod p$.

3. **(Критерій Вільсона.)** $p \in \mathbb{P} \iff p \mid (p-1)! + 1$. (Цей запис означає, що $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$)

   Наприклад, число 7 — просте, і $(7-1)! + 1 = 721 \,\vdots\, 7$. *Доведіть критерій Вільсона. Можливо, попередні вправи вам у цьому допоможуть.*

4. (**Теорема Лейбніца.**) $p \in \mathbb{P} \iff (p-2)! \equiv 1 \pmod p$.

5. (**Теорема Клемента.**) Числа p і $p+2$ є простими числами–близнятами тоді і тільки тоді, коли
$$4((p-1)! + 1) + p \equiv 0 \pmod{p^2 + p}$$

   Означення. Функцією Ейлера $\varphi(m)$ від натурального числа m будемо називати кількість натуральних чисел, що не перевищують m та взаємно прості з m.

   Наприклад, $\varphi(6) = 2, \varphi(11) = 10$.

6. Нехай $p \in \mathbb{P}$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Чому дорівнює сума
$$\varphi(1) + \varphi(p) + \varphi(p^2) + \cdots + \varphi(p^\alpha)?$$

   Звісно, що для цього спочатку треба зрозуміти чому дорівнює $\varphi(p)$ *і* $\varphi(p^\alpha)$.

7. $(m, n) = 1$, тоді $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ — *правильно, це означає, що функція Ейлера мультиплікативна.*

8. Розв'яжіть рівняння а) $\varphi(5^x) = 100$; б) $\varphi(3^x \cdot 5^y) = 600$.

9. Розв'язати рівняння $a = 2\tau(a)$, де $\tau(a)$ — кількість дільників a.

10. Нехай $p > 2$ — просте число. Скільки існує способів розфарбувати правильний p -кутник в a кольорів (це означає, що не більш, ніж в a)? (Розфарбовки, які можна сумістити поворотом, вважаються однаковими.) *Подумайте, чому нам дано, що* p *— просте.*