Задача 1. Покажите, что $\varepsilon = e^{2\pi ik/n}$ является первообразным корнем степени n из 1 тогда и только тогда, когда $(k, n) = 1$. Покажите, что если $m \neq n$, то множества первообразных корней степеней m и n не пересекаются.

Задача 2. Обозначим $\Phi_n(x)$ круговой многочлен порядка n. Докажите, что он имеет такие свойства:

(1) $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$,
(2) Если $n > 1$ нечётно, то $\Phi_n(-1) = 1$,
(3) Если $n > 1$ нечётно, то $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$,
(4) $\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(n/d)}$,
(5) Пусть p простое. Тогда $\Phi_{pn}(x) = \Phi_n(x^p)$ если n делится на p, и $\Phi_{pn}(x) = \Phi_n(x^p)/\Phi_n(x)$ если $(n, p) = 1$.
(6) Найти $\Phi_{105}(x), \Phi_{36}(x)$,
(7) Найти значения $\Phi_n(\pm 1)$.
(8) Многочлен $\Phi_n(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$ (это вам доказывать не надо).

Задача 3. Дано нечётное число n. Обозначим $R = \{r_1, \dots, r_k\}$ множество всех натуральных чисел меньших n и взаимнопростых с n. Для $i = 0, 1, \dots, n-1$ обозначим a_i количество непустых подмножеств $J \subset \{1, 2, \dots, k\}$, для которых $\sum_{j \in J} r_j$ даёт остаток i при делении на n. Докажите, что $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1}$ и найдите a_0.

Задача 4. Последовательность целых чисел $a_n, n \geqslant 1$ такова, что $2^n = \sum_{d|n} a_d$. Докажите, что a_n делится на n.

Задача 5. Пусть две последовательности a_n, b_n ненулевых комплексных чисел удовлетворяют $b_n = \prod_{d|n} a_d$. Выразите a_n через b_n.

Задача 6. Докажите, что $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ и $\varphi(n) = n \sum_{d|n} \mu(d)/d$.

Задача 7. Функцию $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ назовём мультипликативной если $\alpha(mn) = \alpha(n)\alpha(m)$ для всех взаимнопростых m, n.

(1) Проверьте, что $Id(n) = n, \mu(n)$ мультипликативны,
(2) Покажите, что если α, β мультипликативны, то их мультипликативная свёртка также мультипликативна,
(3) Докажите с помощью предыдущего пункта, что $\varphi(n)$ мультипликативна. С помощью этого выведите формулу для $\varphi(n)$.

Немного о разбиениях натуральных чисел.

Задача 8. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, которые нельзя представить в виде $x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^9 + x_5^{11}$ (x_i натуральные).

Задача 9. Для натурального n обозначим $f(n)$ количество разбиений n в сумму степеней двойки $2^k, k \geqslant 0$. Порядок роли не играет.

(1) Найти производящую функцию $F(x)$ последовательности $f(n)$. Составить уравнение для $F(x)$. Из него найти реккурентные соотношения для $f(n)$. Доказать их комбинаторно.
(2) Доказать, что при $n \geqslant 3$ $2^{n^2/4} < f(n) < 2^{n^2/2}$.

Задача 10. Обозначим $p(n)$ количество разбиений n в сумму натуральных слагаемых. Докажите, что при $n \geqslant 2$ $2^{[\sqrt{n}]} < p(n) < n^{3[\sqrt{n}]}$.

Задача 11. Докажите, что каждое натуральное n можно представить в виде суммы слагаемых вида $2^x 3^y$, $x, y \geqslant 0$, где никакое слагаемое не делит другое.

Задача 12. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, такая, что каждое целое неотрицательное число единственным образом представимо в виде $a_i + 2a_j + 4a_k$, где i, j, k не обязательно различны. Существует ли такая последовательность? Верно ли, что она единственна? Если да, то найти a_{2011}.