Занятие 1

Задача 1 Пусть k, n натуральные. Приведите условие на k, n, которое гарантирует, что существует полином $P(x)$ степени n с коэффициентами $0, \pm 1$, который делится на $(x^2-1)^k$.

Задача 2 (Пример Моцкина) Покажите, что многочлен $F(x,y) = x^2y^2(x^2+y^2-3)+1$ неотрицателен, но его нельзя представить в виде суммы квадратов.

Задача 3 Докажите, что многочлен $F(x,y,z) = x^2(x-1)^2+y^2(y-1)^2+z^2(z-1)^2+2xyz(x+y+z-2)$ неотрицательный, но его нельзя представить в виде суммы квадратов.

Задача 4 Известна следующая теорема Пурше: если $P(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, $P(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, то $P = P_1^2 + \ldots + P_5^2$, где P_i — многочлены с рациональными коэффициентами ($1 \leqslant i \leqslant 5$). Привести пример неотрицательного квадратного трёхчлена с рациональными коэффициентами, который нельзя представить в виде суммы 4 квадратов многочленов с рациональными коэффициентами.

Задача 5 Доказать, что уравнение $x^3 + ax^4 + bx^3 + c = 0$, где a, b, c действительные и $c \neq 0$ имеет хотя бы 2 различных комплексных, не действительных корня.

Задача 6 Для комплексного полинома $p(z)$ и числа $c \in \mathbb{C}$ обозначим $M_c(p) = \{z : p(z) = c\}$. Показать, что если для многочленов p, q $M_0(p) = M_0(q)$ и $M_1(p) = M_1(q)$, то $p = q$.

Задача 7 Сколько существует полиномов $x^3 + ax^2 + bx + c$, у которых множество (точнее, мультимножество) корней (включая кратности) совпадает с a, b, c.

Задача 8 Существует ли полином $p(x)$, для которого $p(\sin x) = \cos x$ при всех x из некоторого промежутка $[\alpha, \beta]$?

Задача 9 Для каждого натурального n найти количество действительных корней (включая кратности) полинома $p_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$.

Задача 10 Пусть $f(x)$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Доказать, что существует число c (зависящее от f), что для произвольного многочлена $p(x)$ с целыми коэффициентами количество различных целых корней полинома $f(p(x))$ не превосходит $\deg p + c$.