

Олімпіада для крутих пацанів -2

1. Знайдіть всі функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що $f(x^2 - y^2) = (x + y)(f(x) - f(y))$ для всіх дійсних чисел x та y .
2. Яку найменшу кількість комірок дошки $n \times n$ потрібно зафарбувати, щоб для кожного $m > \frac{n}{2}$ обидві діагоналі довільної дошки $m \times m$ містили зафарбовану комірку?
3. Гострокутний нерівнобедрений трикутник ABC вписано в коло Ω . Коло ω з центром в O проходить через B та C і перетинає AB та AC в точках E та D відповідно. Точка P лежить на більшій дузі BAC кола Ω . Доведіть, що прямі BD, CE, OP перетинаються в одній точці тоді і лише тоді, коли трикутники PBD та PCE мають спільний інцентр.
4. Для многочлена $P(x)$ з цілими коефіцієнтами визначимо $r(2i - 1)$ (для $i = 1, 2, 3, \dots, 512$) як залишок $P(2i - 1)$ при діленні на 1024. Послідовність

$$(r(1), r(3), \dots, r(1023))$$

називається послідовністю лишків $P(x)$. Послідовність лишків називається повною, якщо вона є перестановкою $(1, 3, 5, \dots, 1023)$. Доведіть, що є не більше ніж 2^{35} різних повних послідовностей.