Общие вопросы о неподвижной точке.

Задача 1. Пусть $f : [a, b] \to [a, b]$ — непрерывная функция. Докажите, что существует ξ, такое, что $f(\xi) = \xi$. Такая точка называется неподвижной точкой отображения f. Верно ли будет это утверждение, если вместо отрезка рассматривать интервал (a, b) ?

Задача 2. Пусть $D_0 = \{x^2 + y^2 < 1\}$ — открытый круг в R^2. Постройте пример непрерывного отображения $f : D_0 \to D_0$ без неподвижных точек.

Задача 3. Пусть $n \geqslant 1$. Рассмотрим замкнутый круг $D = \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Сделаем в нем n дырок, т.е. вырежем открытые круги $D_1, \dots, D_n$ из D (границы этих кругов попарно не пересекаются и не пересекаются с границей исходного круга). Полученый продырявленый круг обозначим $\widetilde{D}$. Постройте непрерывное отображение $f : \widetilde{D} \to \widetilde{D}$ без неподвижных точек.

Задача 4.(Лемма Шпернера) Пусть Δ — треугольник с вершинами A, B, C. Пусть Δ разбит на малые треугольники, причем выполнено следующее условие: любые два малых треугольника или не имеют общих точек, или имеют только общую вершину, или имеют общую сторону. Такое разбиение будем называть триангуляцией. (НЕ КАЖДОЕ РАЗБИЕНИЕ ЯВЛЯЕТСЯ ТРИАНГУЛЯЦИЕЙ). Малые треугольники называют гранями триангуляции, стороны малых треугольников ее ребрами, их вершины называют вершинами триангуляции.

Пусть все вершины триангуляции покрашены в один из трех цветов 1,2,3. Предположим, что A имеет цвет 1, B цвет 2, C цвет 3. Кроме того, каждая вершина триангуляции, лежащая на AB имеет цвет 1 или 2, на BC цвет 2 или 3, на CA цвет 3 или 1.

Докажите, что число разноцветных граней триангуляции нечетно.

Задача 5. Пусть Δ — треугольник, $f : \Delta \to \Delta$ — непрерывное отображение. С помощью леммы Шпернера докажите, что существует точка $\xi \in \Delta$ такая, что $f(\xi) = \xi$.

Задача 6. Пусть D — замкнутый круг в R^2, $f : D \to D$ — непрерывное отображение. С помощью предыдущей задачи докажите, что у f есть неподвижная точка. Докажите аналогичное утверждение если D является выпуклым n-угольником.

Задача 7.(3-мерная лемма Шпернера) Пусть Δ — тетраедр в R^3 с вершинами A_0, A_1, A_2, A_3. Пусть задана триангуляция Δ на тетраедры. (дайте определение триангуляции аналогичное для треугольника)

Пусть каждая вершина триангуляции покрашена в один из цветов 0,1,2,3, причем вершина A_k имеет цвет k, и если вершина триангуляции принадлежит грани исходного тетраедра, то ее цвет совпадает с цветом одной из вершин этой грани, аналогичное условие ставим для ребра исходного тетраедра.

Докажите, что число разноцветных тетраедров нечетно.

Задачи о неподвижной точке.

Задача 1. Пусть $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — непрерывная функция, причем $f(f(x)) = 2x^3$. Найти $f(1/\sqrt{2})$.

Задача 2. Найти все функции $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, такие, что

(1) $f(xf(y)) = yf(x)$ для всех $x, y > 0$;

(2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Задача 3. Пусть $f : [0,1] \to R$ — непрерывная на $[0,1]$, дифференцируемая на $(0,1)$ функция. Предположим, что $f(0) = 1, f(1) = 0$. Докажите, что существуют $a < b$ из $(0,1)$, для которых $f'(a)f'(b) = 1$.

Задача 4. Найти все $f : (-1,\infty) \to (-1,\infty)$ такие, что $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ и функция $f(x)/x$ возрастает на каждом из промежутков $(-1,0)$ и $(0,\infty)$.

Задача 5. Обозначим $N_0 = N \cup \{0\}$. Найти все $f : N_0 \to N_0$ такие, что $f(m+f(n)) = f(f(m)) + f(n)$.

Задача 6. Пусть G — непустое множество непостоянных функций, каждая функция из G имеет вид $f(x) = ax + b$. Предположим, что

(1) если $f, g \in G$, то $f(g) \in G$;
(2) если $f \in G$, то $f^{-1} \in G$ (обратная функция);
(3) у каждой функции $f \in G$ есть неподвижная точка.

Докажите, что у всех функций из G есть общая неподвижная точка.

Задача 7. Найти все $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ такие, что $x^2(f(x)+f(y)) = (x+y)f(yf(x))$.

Задача 8. Найти все $f : R \to R$ такие, что $f(f(x)) = x^2 - 2$ для всех $x \in R$.

Задача 9. Задана система уравнений $\begin{cases} x = x^3 + x^2y + xy^2 - \sin x^5 + 0.5y \\ y = y^3 + 2x^2y + 2xy^2 + \sin x^5 + 0.5x. \end{cases}$ Докажите, что существует решение этой системы (x_0, y_0) такое, что $x_0, y_0 \in (0,1)$.

Задача 10. Задана система уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_1x_2 + \sin x_2^3 - x_3^3 = 0, \\ x_2 - x_3^2 - x_1x_3 + x_3^3 + \sin(x_1^2x_3) = 0, \\ x_3 - x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - \sin(x_1^2x_3) - \sin x_2^3 = 0. \end{cases}$

Докажите, что эта система имеет решение (x_1^*, x_2^*, x_3^*), где все $x_i^* \in (0,1)$.