Language: **Ukrainian**

Day: **1**

Четвер, 12 квітня 2012

Задача 1. Нехай ABC — трикутник з центром описаного кола в точці O. Точки D, E та F лежать всередині сторін BC, CA та AB відповідно, так, що пряма DE перпендикулярна до CO та DF перпендикулярна до BO. (Тобто, точка D лежить на прямій BC між точками B та C і т.д.)

Нехай K — центр описаного кола трикутника AFE. Доведіть, що прямі DK та BC перпендикулярні.

Задача 2. Нехай n — натуральне число. В залежності від n знайдіть найбільше можливе ціле m, що має таку властивість: таблицю з m рядками та n стовпчиками можна заповнити дійсними числами таким чином, що для будь-яких двох різних рядків $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ та $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ виконується:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Задача 3. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що

$$f\big(\, yf(x+y) + f(x) \,\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Множина цілих чисел A називається *сумо-повною*, якщо $A \subseteq A + A$, тобто, будь-який елемент $a \in A$ представляється у вигляді суми деякої пари (не обов'язково різних) елементів $b, c \in A$ (можливо, $b = c$). Множина цілих чисел A називається *без-суми-нуль*, якщо 0 — єдине ціле число, що не представляється у вигляді суми елементів скінченої непорожньої підмножини множини A.

Чи існує сумо-повна без-суми-нуль множина цілих чисел?

Час: 4 години та 30 хвилин
За кожну задачу максимум 7 балів

Language: **Ukrainian**

Day: **2**

П'ятниця, 13 квітня 2012

Задача 5. Прості числа p та q задовольняють умову

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

для деякого натурального числа n. Знайдіть усі можливі значення $q - p$.

Задача 6. Нескінченно багато людей зареєстровані в соціальній мережі *Mugbook*. Деякі пари (різних) користувачів зареєстровані як *друзі*, але кожна особа має лише скінчену кількість друзів. Кожен користувач має принаймні одного друга. *(Дружба симетрична, тобто якщо A є другом B, то B є другом A.)*

Кожна особа має назвати одного зі своїх друзів *найкращим другом*. Якщо A називає B своїм найкращим другом, то (на жаль) це не означає, що B обов'язково назве A своїм найкращим другом. Людина, котру назвали найкращим другом, називається 1-*найкращий друг*. Загалом, для натурального $n > 1$ користувач є n-*найкращим другом*, якщо він був названий найкращим другом особи, яка є $(n-1)$-*найкращим другом*. Особа, котра є k-*найкращим другом* для будь-якого натурального k, називається *популярною*.

(a) Доведіть, що кожна популярна особа є найкращим другом іншої популярної особи.

(b) Доведіть, що у випадку, коли кожен може мати нескінченну кількість друзів, може бути, що популярна особа не є найкращим другом популярної особи.

Задача 7. Нехай ABC — гострокутний трикутник з описаним навколо нього колом Γ та ортоцентром H. Нехай K — точка кола Γ по іншу сторону від A відносно BC. Нехай L симетрична точці K відносно прямої AB, а M симетрична точці K відносно прямої BC. Нехай E є другою точкою перетину Γ з описаним колом трикутника BLM. Доведіть, що прямі KH, EM та BC перетинаються в одній точці. *(Ортоцентром трикутника є точка перетину його висот.)*

Задача 8. *Словом* називається скінчена послідовність літер з деякого алфавіту. Слово називається *повторним*, якщо воно є зчепленням принаймні двох однакових підслів (наприклад, *ababab* та *abcabc* повторні, а *ababa* та *aabb* — ні). Доведіть, що якщо слово має властивість, що перестановка будь-яких двох сусідніх літер робить слово повторним, то всі його літери однакові. (Зауважимо, що перестановка двох сусідніх однакових літер лишає слово незмінним.)

Час: 4 години та 30 хвилин
За кожну задачу максимум 7 балів