Принцип Діріхле

Сердюк Назар, nsaann@gmail.com

1. Доведіть, що серед будь-яких $n+1$ чисел з множини $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ знайдуться два таких, що одне ділиться на інше.

2. Нехай a_i, b_i, $1 \le i \le 7$ – невід'ємні дійсні числа такі, що $a_i + b_i \le 2$. Доведіть, що існують індекси i, j такі, що $|a_i - a_j| + |b_i - b_j| \le 1$.

3. Сума дійсних чисел $x_1, x_2, \cdots, x_n$ – ціла. Доведіть, що можна вибрати декілька з цих чисел так, щоб дробова частина суми цих чисел не перевищувала $\frac{1}{n}$.

4. Нехай S – множина, що складається з 10 натуральних чисел з сумою меншою за 250. Доведіть, що можна вибрати дві підмножини $A, B \subset S$ такі, що $|A| = |B|$, $A \cap B = \emptyset$ та сума елементів A дорівнює сумі елементів B.

5. Нехай $S \subset \{1, 2, \cdots, 100\}$, $|S| = 16$. Доведіть, що знайдуться чотири різні числа $a, b, c, d \in S$ такі, що $a + b = c + d$.

6. Таблиця $n \times n$ заповнена числами від 1 до n так, що кожне число використано рівно n раз. Доведіть, що існує рядок або стовпчик в якому є принаймні $\sqrt{n}$ різних чисел.

7. Знайдіть найменше натуральне число n таке, що якщо n клітинок квадратної таблиці 1000×1000 пофарбовані, то знайдеться прямокутний трикутник з вершинами в центрах пофарбованих клітинок, з катетами паралельними до сторін таблиці.

8. Дано натуральні числа $n_1 < n_2 < \cdots < n_{2000} < 10^{100}$. Доведіть, що існують дві множини $A, B \subset \{n_1, n_2, \cdots, n_{2000}\}$ такі, що $|A| = |B|$, $A \cap B = \emptyset$, $\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in B} x$ і $\sum_{x \in A} x^2 = \sum_{x \in B} x^2$.

9. В кожній клітинці нескінченної клітчастої площини записано дійсне число. Розглянемо дві фігури F_1 та F_2 на площині, що складаються з декількох клітинок. Відомо, що сума чисел в будь-якій клітчастій фігурі, що отримана з F_1 за допомогою паралельного переносу є додатною. Доведіть, що існує клітчаста фігура, що отримана з F_2 за допомогою паралельного переносу така, що сума чисел в клітинках цієї фігури є додатною.

10. Нехай $x_1, x_2, \cdots, x_n$ – дійсні числа, що задовольняють умову $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Доведіть, що для будь-якого натурального $k \ge 2$ існують цілі числа $a_1, \cdots, a_n$, не всі рівні нулю, такі, що $|a_i| \le k - 1$ для кожного $1 \le i \le n$ і $|a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n| \le \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$.

11. На колі дано n точок між якими проведено $kn + 1$ хорд. Доведіть, що серед цих хорд можна вибрати $k + 1$ так, що жодні дві з них не перетинаються.

12. Нехай $x_1, \cdots, x_n \le m$; $y_1, \cdots, y_m \le n$, де $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m$ – натуральні числа. Доведіть, що існують дві непусті підмножини $S_1 \subseteq \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ та $S_2 \subseteq \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ з рівною сумою елементів.

13. Нехай n, m – натуральні числа. Дано граф з n вершин такий, що степінь кожної вершини дорівнює m. Доведіть, що для кожного натурального $k \le m + 1$ можна вибрати щонайменше $\frac{kn}{m+1}$ вершин таких, що серед цих вершин не існує $k + 1$ попарно з'єднаних між собою.

14. Для натурального n визначимо послідовність з 0 та 1 збалансованою якщо вона містить рівно n нулів та рівно n одиниць. Дві збалансовані послідовності a та b назвемо сусідніми якщо в a можна переставити один з $2n$ символів на іншу позицію щоб отримати b. Доведіть, що існує множина S, що складається не більше ніж з $\frac{C_{2n}^n}{n+1}$ збалансованих послідовностей така, що будь-яка збалансована послідовність належить S або має сусідню в S.

15. Дано цілі числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $n > 1$ такі, що жодне з них не ділиться на n і n не ділить $a_1 + a_2 + \cdots a_n$. Доведіть. що існує принаймні n різних послідовностей $e_1, e_2, \cdots, e_n$ чисел 0 або 1 таких, що $e_1 a_1 + e_2 a_2 + \cdots e_n a_n$ ділиться на n.