Нерівності: 9 клас

1.24. а) $\dfrac{1-a}{1-b}+\dfrac{1-b}{1-a}\leqslant\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$, где $0<a,b\leqslant\dfrac{1}{2}$;

б) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-a_i}\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\sum_{i=1}^{n}a_i$, где $0<a_1,\ldots,a_n\leqslant\dfrac{1}{2}$.

2. $\dfrac{\sin x-1}{\sin x-2}+\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{2-\sin x}{3-\sin x}$.

3. $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}\geqslant\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}-\dfrac{2}{c}$, где $a,b,c>0$.

5. $3(1+a^2+a^4)\geqslant(1+a+a^2)^2$.

8. $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}\leqslant\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2\sqrt{abc}}$, где $a,b,c>0$.

22. $\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)<2$, где $n\geqslant 2$, $n\in\mathrm{N}$.

30. $1<\dfrac{a}{a+b+d}+\dfrac{b}{a+b+c}+\dfrac{c}{b+c+d}+\dfrac{d}{a+c+d}<2$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$.

2.6. $0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\dfrac{7}{27}$, где $x,y,z\geqslant 0$ и $x+y+z=1$.

1. $\dfrac{1}{1+x_1}+\dfrac{1}{1+x_2}+\ldots+\dfrac{1}{1+x_n}\leqslant\dfrac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}$, где $0<x_1,x_2,\ldots,x_n\leqslant 1$, $n\geqslant 2$.

2.4. $\dfrac{1}{1+x_1}+\ldots+\dfrac{1}{1+x_n}\geqslant\dfrac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}$, где $x_1,\ldots,x_n\geqslant 1$, $n\geqslant 2$.

4. а) $\dfrac{1+x_1}{x_1}\dfrac{1+x_2}{x_2}\ldots\dfrac{1+x_n}{x_n}\geqslant(n+1)^n$,

б) $\dfrac{1+x_1}{1-x_1}\dfrac{1+x_2}{1-x_2}\ldots\dfrac{1+x_n}{1-x_n}\geqslant\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$, где $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$ и $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$, $n\geqslant 2$.

8. Пусть $x_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ — действительные числа, причем $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$ $(n\geqslant 4)$. Докажите, что для любого λ $(0<\lambda<n)$ справедливо следующее неравенство:

$$x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)-\lambda x_1x_2\ldots x_n\leqslant\frac{n^2-\lambda}{n^n}.$$

15. Докажите, что:

а) $\dfrac{1}{1+s-x_1}+\ldots+\dfrac{1}{1+s-x_n} \leqslant 1$, где $s = x_1+\ldots+x_n$, $x_1 x_2 \ldots$ $\ldots x_n = 1$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$;

3.2. $$(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c) \leqslant \leqslant (a+b)(b+c)(c+d)(d+a), \text{ где } a,\ b,\ c,\ d > 0.$$

3.3. а) $a^3+b^3+c^3+3abc \geqslant a^2b+ab^2+b^2c+c^2b+a^2c+ac^2$, где $a, b, c > 0$;

Нерівність Шура:

3.5. $abc \geqslant (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$, где $a, b, c > 0$.

3.9. $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c)$.

9. $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}+\dfrac{a_n}{a_1} \geqslant n$, где $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

4.2. $ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leqslant 1$, если $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$.

4.4. $a\sqrt{a^2+c^2}+b\sqrt{b^2+c^2} \leqslant a^2+b^2+c^2$.

4.5. $\dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}} \leqslant \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

4.6. $$\sqrt{a}(a+c-b)+\sqrt{b}(a+b-c)+\sqrt{c}(b+c-a) \leqslant \leqslant \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)},$$

где a, b, c — стороны некоторого треугольника.

4.14. $$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(a_1^7+a_2^7+\ldots+a_n^7) \geqslant \geqslant (a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3)(a_1^5+a_2^5+\ldots+a_n^5),$$

6. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{y_i}\right) \geqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2$, где $x_i, y_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

7. $$ax+by+cz+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqslant \geqslant \frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z).$$