Домашнее задание 07.12.13

1 Старое.

1. Пусть
$$\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \cdots < \alpha_n < \beta_n$$
— фиксированные числа. Доказать, что все корни многочлена
$$P(x) = (x + \alpha_0) \ldots (x + \alpha_n) + 2(x + \beta_0) \ldots (x + \beta_n)$$
действительны.

2. Рассмотрите функцию Дирихле, которая равна 1 в рациональных точках и 0 в иррациональных, и на её основе придумайте пример функции, которая непрерывна во всех иррациональнх точках и разрывна во всех рациональных.

3. Докажите, что инъективная монотонная функция — непрерывна.

2 Новое

1. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Внутри треугольника $A_1B_1C_1$ взята точка P. Прямые A_1P, B_1P, C_1P пересекают B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 в точках A_2, B_2, C_2. Доказать, что AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

2. В гострокутому трикутнику ABC висоти AH_1, BH_2, CH_3 перетинаються в ортоцентрі H. Перпендикуляр з H на H_1H_3 перетинає пряму AB в P, а перпендикуляр з H на H_1H_2 перетинає пряму AC в Q. Доведіть, що перпендикуляр з A на H_2H_3 ділить відрізок PQ навпіл.

3. Нехай H — ортоцентр трикутника ABC. Пряма, що проходить через H, перетинає сторони AC та AB в точках M та N відповідно. Описане коло ω трикутника MNC вдруге перетинає описане коло трикутника ABC в точці P. Пряма PH вдруге перетинає ω в точці Q. Доведіть, що $MN \perp CQ$.

4. Вписане коло ω трикутника ABC з центром в I дотикається сторін BC, AC AB в точках A', B' та C'. Пряма $A'I$ вдруге перетинає $B'C'$ в точці M. Доведіть, що пряма AM містить медіану трикутника ABC.

5. Нехай M — довільна внутрішня точка бісектриси AL трикутника ABC. Через точку L проведено довільну пряму, яка перетинає сторону AB в точці P, а продовження сторони AC за точку C — у точці Q. Нехай N — точка перетину прямих BM і PQ, а K — точка перетину прямих BM і PQ. Доведіть, що $\angle NAL = \angle KAL$.

6. Зовнівписане коло ω_C трикутника ABC дотикається сторони AB і продовжень сторін BC і CA в точках M, N і P відповідно, а зовнівписане коло ω_B дотикається сторони AC і продовжень сторін AB і BC в точках S , Q і R відповідно. Нехай $X = MN \cup RS$, $Y = MN \cup RQ$. Доведіть, що точки X, Y і A лежать на одній прямій.

7. Нехай H — точка перетину висот AP і CQ гострокутного трикутника ABC. На медіані BM відмітили точки E і F так, що $\angle APE = \angle BAC$, $\angle CQF = \angle BCA$, причому точка E лежить всередині трикутника APB, а точка F — усередині трикутника CQB. Доведіть, що прямі AE, CF і BH перетинаються в одній точці.

8. Окружности S_1, S_2, S_3 расположены внутри треугольника ABC, касются его сторон и окружности S внешним образом в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.