

# Разные задачи -1

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

**Задача 1.** Точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  — основания высот остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность с центром  $B$  и радиусом  $BB'$  пересекает прямую  $A'C'$  в точках  $K, L$  (точки  $A, K$  лежат по одну сторону от  $BB'$ ). Докажите, что точка пересечения прямых  $AK, CL$  лежит на прямой  $BO$ , где  $O$  — центр описанной окружности  $ABC$ .

**Задача 2.**  $A_1, B_1, C_1$  — середины сторон правильного треугольника  $ABC$ . Три параллельные прямые, проходящие через  $A_1, B_1, C_1$ , пересекают прямые  $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$  в точках  $A_2, B_2, C_2$  соответственно. Доказать, что прямые  $AA_2, BB_2, CC_2$  пересекаются в одной точке, лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**Задача 3.** В треугольнике  $ABC$   $\angle A = \alpha$ ,  $BC = a$ . Вписанная окружность касается прямых  $AB, AC$  в точках  $M, P$ . Найти длину хорды, высекаемой на прямой  $MP$  окружностью с диаметром  $BC$ .

**Задача 4.** Дан треугольник  $ABC$ . Точка  $P$  лежит на окружности  $ABH$ , где  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . Прямые  $AP$  и  $BP$  пересекают стороны  $BC$  и  $AC$  в точках  $A'$  и  $B'$ . Найдите  $GMT$  середин отрезка  $A'B'$ .

**Задача 5.** Вписанная и описанная окружности треугольника  $ABC$  касаются стороны  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ . Известно, что  $\angle BAC = 2\angle MAN$ . Докажите, что  $BC = 2MN$ .

**Задача 6.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели высоты  $BE$  и  $CF$ . Две окружности, которые проходят через  $A$  и  $F$  касаются прямой  $BC$  в разных точках  $P$  и  $Q$ , так что  $B$  лежит между  $C$  и  $Q$ . Докажите, что прямые  $PE$  и  $QF$  пересекаются на описанной окружности треугольника  $AEF$ .