Задавальничок на літо!

1. На Олімпі 1001 сходинка, на деяких лежать камені, по одному на сходинці. Зевс бере будь-який камінець і переносить його вверх на ближайшу вільну сходинку. Після чого Аїд опускає на одну сходинку вниз один з каменів, у якого попередня сходинка вільна. Каменів 500 і спочатку вони лежать на нижніх 500 сходинках. Зевс і Аїд діють по черзі, починає Зевс. Ціль Зевса покласти камінь на верхню сходинку. Чи може Аїд йому помішати?
2. Під час перемир'я за круглим столом розмістились рицарі з двох ворогуючих станів. Виявилось, що число рицарів праворуч від яких сидить ворог рівне числу рицарів праворуч від яких сидить друг. Довести, що число рицарів ділиться на 4.
3. В одному бідоні знаходиться 1л води, а в іншому - 1л спирту. Дозволяється переливати будь-яку частини рідини із одного бідона в інший. Чи можна добитися, щоб в першому бідоні концентрація спирту виявилась більше 50 відсотків.
4. На дошці написано число 12. Кожну хвилину число домножують або ділять на 2 або на 3 і результат записують на дошку замість початкового числа. Доведіть, що число, яке буде записане на дошці рівно через годину, не буде дорівнювати 54.
5. В будівлі є декілька кімнат в кожній є декілька людей. Кожної хвилини, якщо це можливо, деяка людина виходить з кімнати і заходить в іншу кімнату в якій було принаймні стільки ж людей. Доведіть, що наступить момент коли всі будуть в одній кімнаті.
6. Є купа з х камінців. За один крок дозволяється розділити купу на дві непорожні та додати добуток кількості камінців у двох отриманих купах до загальної суми. Процес закінчується коли в кожній купі буде по 1 камінцю. Доведіть, що незалежно від способу розділення кінцеве значення загальної суми не буде змінюватись.
7. Нехай у графі n вершин і m ребер. Також відомо, що вньому існує p вершин степеня t, а решта вершин мають степінь $t+1$. Доведіть, що $p=(t+1)\mathrm{n}-2\mathrm{m}$.
8. 29 команд проводять футбольний турнір в одне коло. Довести, що в будь-який момент часу знайдеться команда, що зіграла парну кількість матчів.
9. Доведіть, що довільний цикл містить простий цикл.
10. Довести: якщо два різних цикли графа містять спільне ребро, то в графі є цикл, що не містить цього ребра.
11. Довести, що в графі, в якому степені всіх вершин більші за 1, є цикл.
12. Доведіть, що якщо в зв'язному графі існує тільки дві вершини з непарним степенем, то вони з'єднані між собою.
13. Доведіть, що або початковий граф або його доповнення є зв'язним графом.
14. У вас є дошка 4х4 з якої видалили кутові клітинки. Чи можна її обійти за допомогою шахового коня?
15. Довести, що граф з n вершинами є деревом тоді і лише тоді, коли для будь-яких двох різних вершин в ньому існує лише один простий ланцюг між цими вершинами.
16. Довести, що граф є деревом тоді і лише, коли граф зв'язний і після вилучення будь-якого ребра з нього граф стає незв'язним.

17. Довести, що будь-яке дерево, в якому є хоча б одна вершина степеня s, має не менше s висячих вершин.
18. Вздовж кордонів клітинок шахової дошки поклали сірники. Скільки сірників необхідно прибрати, щоб тура могла добратись з будь-якого поля на довільне інше не перестрибуючи через сірники?
19. Чи існує 100 послідовних натуральних чисел серед яких рівно 5 простих чисел.
20. Білка ховала горішки вздовж прямої. Відомо, що вона від кожної схованки до наступної пробігала не більше 3 м. Виявилось, що відстань від першої схованки до останньої рівно 100 м. Доведіть, що знайдуся дві схованки відстань між якими не менше 22 метрів і не більше 25.
21. Є 10 хлопчиків і 10 дівчат, які сидять за круглим столом. Довести, що існує група з 10 підряд дітей, серед яких хлопців і дівчат порівну.
22. За круглим столом сидить парна кількість гномів в ковпаках з помпонами. Відомо, що будь-які два підряд мають кількості помпонів, що відрізняються не більше ніж на 1. Довести, що знайдетьсяя пара гномів, один навпроти іншого, у яких кількість помпонів відрізняється не більше ніж на 1.
23. 2x радіусів розділили коло на 2x рівних секторів : x синіх, x червоних, що чергуються в деякому порядку. В сині сектори, починаючи з якогось записують проти годинникової стрілки числа від 1 до x по порядку. В червоні сектори, починаючи з деякого, записують ті ж числа але за годинниковою стрілкою. Довести, що знайдеться півкруг з усіма записаними числами від 1 до x.
24. В кажній клітині дошки 9x9 сидить гусениця. По команді всі гусениці переповзають на одну з сусідніх по діагоналі клітинок. Доведіть, що після цього крайньою мірою 9 клітинок будуть пустими.
25. З клітчатої дошки розміром 8x8 по клітинках вирізали 12 прямокутників розміром 1x2. Чи обов'язково з решти дошки «по клітинках» можна вирізати прямокутник 1x3?
26. Чи можна розрізати квадрат 5x5 на 7 триклітинкових кутиків та 1 квадрат 2x2?
27. Яку найменшу кількість прямокутників 1x2 клітинки треба замалювати на дошці 8x8 клітинок, щоб будь-який квадрат 2x2 містив хоча б одну замальовану клітинку?
28. В квадраті 7x7 клітинок розміщено 16 плиток розміром 1x3 і одна плитка 1x1. Доведіть, що плитка 1x1 лежить або в центрі або розташована біля границі квадрата.
29. На дошці записане число 1. Число n на дошці змінюєть на n+1 або на 2n. Хто отримає число більше 1000 той виграв. Хто виграє при правильній грі?
30. На дошці записано число 2016^{2016} . За хід дозволяється віднімати від нього число від 1 до 2015 або ділити його на 2016 (якщо не ділиться, то ділимо і округляємо в меншу сторону). Хто отримує 0 той виграв.
31. У ряд виписані послідовні натуральні числа 1 до 2000. Двоє по черзі вписують між цими числами знак додавання або множення (усього вписано 1999). Якщо кінцеве значення одержаного виразу ділитиметься на 3, то виграє той, хто ходив першим. В іншому випадку виграє його суперник. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Знайдіть для нього виграшну стратегію.
32. Дано смужку розміром 1x17, клітинки якої зліва направо пронумеровано послідовними числами від 1 до 17. Двоє учнів грають у таку гру, по черзі роблячи свої

ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці або деякі дві послідовні, серед яких ліва має парний номер. Переможеним вважатиметься той хто не може зробити хід. Хто може забез печити собі виграшну стратегію і вкажіть її.

33. Є клітчатий прямокутник 3x10. Двоє грають в гру. Ходять по черзі. За один хід можна зафарбувати квадрат 1x1, 2x2 або 3x3. Двічі фарбувати клітину не можна. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто має виграшну стратегію?
34. Малюк і Карлсон грають у таку гру: вони беруть шоколадку розміром 2002x2003 і по черзі викусують з неї «по клітинках» шматочки(не обов'язково від країв): Карлсон – рози=міром 2x2, Малюк – розміром 1x1. Якщо не залишилось жодного шматка розміром 2x2, то весь шоколад, що залишився, з'їдає Малюк. Виграє той, хто з'їсть більше шоколаду. Починає Малюк. Хто з них зможе забезпечити собі перемогу?
35. Жили троє селян. Але вони недолюблювали один одного. І було три колодязя. Вони хотіли побудувати стежки від своїх домів до цих колодязів, але так, щоб дороги не перетинались. Чи зможуть вони досягнути цієї цілі?
36. Назвемо степенем грані кількість ребер грані плюс кількість ребер всередині грані помножену на 2. Доведіть, що сума степенів граней рівна подвоєному числу ребер.
37. Доведіть, що якщо граф планарний, то $P \le 3B-6$.
38. Довести, що в будь-якому планарному графі є принаймні одна вершина, степінь якої не більше 5.
39. Нехай планарний граф з В вершинами, Р – ребрами не містить трикутників. Довести, що $P \le 2B-4$.
40. На площині розташовано кілька точок, всі відстані попарно різні. Кожну точку з'єднують з ближайшою. Чи може після таких операцій утворитись замкнена ломана?
41. В квадраті ABCD знаходиться 5 точок. Довести, що відстань між якимись двома з них не перевищує AC/2.
42. Довести що 6 людей завжди знайдуться троє попарно знайомі або троє попарно незнайомі.
43. Є n цілих чисел. Довести, що серед них знайдуть кілька таких, що їх сума ділиться на n.
44. На площині розташований опуклий п'ятикутник з вершинами в цілочисельних точках. Доведіть, що всередині нього окрім вершин є хоча б ще одна цілочисельна точка.(Точка на стороні п'ятикутника вважається внутрішньою)
45. Замість зірочок поставте такі числа, щоб рівність: $(x^2+*\cdot x+2)(x+3)=(x+*)\cdot(x^2+*\cdot x+6)$ стала тотожністю.
46. Доведіть, що для цілих чисел a, b, c, d , які задовольняють умову $a+b=c+d$, вираз: $(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)$ дорівнює подвоєному квадрату цілого числа.
47. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} |xy|+1=|x|+|y| \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.
48. Доведіть, що рівняння x^4-4x+5 не має розв'язків.
49. Відомо, що числа a, b, c , жодне з яких не рівно -1, задовольняють умовам: $ab+a+b=c^2+2c$ та $bc+b+c=a^2+2a$. чи обов'язково виконується також умова: $ca+c+a=b^2+2b$.
50. Задані дійсні числа $a, b, c, d>0$ та $e, f, g, h<0$. Доведіть, що всі нерівності $ae+bc>0,\ ef+cg>0,\ fd+gh>0,\ da+hb>0$ не можуть виконуватись одночасно.

51. Знайдіть всі пари натуральних чисел a, b, для яких виконується рівність: $НСК(a;b) - НСД(a;b) = \frac{ab}{5}$.

52. Про натуральні числа a,b,c відомо, що $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Знайдіть усі можливі значення виразу $\frac{a+b+c}{a+b-c}$.

53. Дано три попарно різні натуральні числа a,b,c. Доведіть, що число $(a+b)(b+c)(c+a)$ не може бути степенем двійки.

54. Знайдіть всі такі цілі значення m, що вираз $\frac{2m+7}{5m+11}$ приймає цілі значення.

55. Ви знаєте натуральне число N і вам дано просте число p. Знайдіть на який найбільший степінь числа p буде ділитись число $N!$.

56. В остроугольном треугольнике провели три высоты. Докажите, что из по- лучившихся шести отрезков (трёх сторон и трёх высот) можно составить два треугольника.

57. Дан треугольник ABC, в котором BC = 2AB. Точка D — середина стороны BC, точка K — середина отрезка BD. Докажите, что AC = 2AK.

58. Внутри остроугольного треугольника ABC с наибольшей стороной BC взята точка P. На сторонах AC и CB выбраны точки X и Y соответственно таким обра- зом, что прямая P X параллельна AB, а прямая P Y параллельна AC. Прямая CP пересекает сторону AB в точке Z. Докажите, что XY + P Z < BC.

59. Можно ли прямоугольник разрезать на три прямоугольника A, B, C так, чтобы у A был самый большой периметр, у B самая большая площадь, а у C самая большая диагональ?

60. Точки P и Q расположены внутри равностороннего треугольника ABC так, что четырёхугольник AP QC — выпуклый, AP = P Q = QC и ∠P BQ = 30◦ . Докажите, что AQ = BP.

61. В выпуклом четырехугольнике ABCD точка M — середина стороны BC. Оказалось, что ∠AMD = 60◦ . Точка K лежит в треугольнике CMD и симметрична точке B относительно прямой AM. Докажите, что KD + MC > CD.

62. Всередині трикутника дані точки A, B, C, D. Доведіть, що на сторонах трикутника знайдеться така точка K, що $KA + KB \geq KC + KD$.

63. AD - бісектриса трикутника ABC, DE - бісектриса трикутника ADC. Виявилось, що $CD = AB,\ AD = CE$. Доведіть, що кут $\angle CDA = 120$.

64. Точка M - середина сторони AC трикутника ABC. Точка D на стороні BC така, що $\angle BMA = \angle DMC$. Виявилося, що $CD + DM = BM$. Доведіть, що $\angle ACB + \angle ABM = \angle BAC$.

65. Всередині трикутника ABC відмічена точка M, так що при цьому $\angle BAM = \angle ABC,\ \angle AMB = 100,\ \angle ACB = 70$. Доведіть, що $BM < AC$.

66. На бісектрисі AL трикутника ABC, в якому $AL = AC$, вибрана точка K таким чином, що $CK = BL$. Доведіть, що $\angle CKL = \angle ABC$.