Тригонометрична геометрія та маси

Богдан Ківва 30bohdan@gmail.com

Ідея 1: $\varphi_1+\varphi_2=\gamma_1+\gamma_2<\pi$ та $\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}=\dfrac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$, тоді $\varphi_1=\gamma_1$, для $\varphi_1,\gamma_1\in(0,\pi)$.

Ідея 2: $tg\varphi_1=tg\varphi_2$ (або інколи $\cos\varphi_1=\cos\varphi_2$) для $\varphi_1,\varphi_2\in[0,\pi)$, тоді $\varphi_1=\varphi_2$.

Задачі:

1) ABC - трикутник. $K\in AC$ така, що KB - дотична до кола описаного навколо ABC. KD - друга дотична до цього кола. Довести, BD - симедіана трикутника ABC.

2) На сторонах трикутника ABC побудовано квадрати ABC_1D_1 та A_2BCD_2. Довести, що точка перетину $AD_2\cap CD_1$ належить висоті трикутника ABC з вершини B.

3) В трикутник ABC вписано квадрат, що одна з його сторін лежить на стороні AB, а інші дві вершини - по одній на інших сторонах трикутника. Позначимо через C_1 точку перетину діагоналей квадрата. Точки A_1,B_1 визначаються аналогічно. Довести, AA_1,BB_1,CC_1 перетинаються в одній точці.

4) На площині дано три кола $\omega_1,\omega_2,\omega_3$. Нехай ω_1,ω_2 перетинаються в C_1,C_2; ω_1,ω_3 - в B_1,B_2; ω_3,ω_2 - в A_1,A_2. Довести, $A_1B_2\bullet B_1C_2\bullet C_1A_2=A_2B_1\bullet B_2C_1\bullet C_2A_1$.

5) O - інцентр трикутника ABC. A_1,B_1,C_1 - точки дотику вписаного кола до сторін. Вибираються точки A_2,B_2,C_2 на променях OA_1, OB_1, OC_1 так, що $A_2O=B_2O=C_2O$. Довести, що AA_2,BB_2,CC_2 перетинаються в одній точці.

6) P точка всередині трикутника ABC, що $\angle ABP=\angle BCP=\angle CAP$. Нехай R_1,R_2,R_3 - радіуси кіл описаних навколо трикутників ABP,ACP,BCP. R - радіус описаного кола трикутника ABC. Довести, $R_1\bullet R_2\bullet R_3=R^3$.

7) $A_1A_2A_3A_4$ - опуклий чотирикутник без паралельних сторін. ω_i - коло, що дотикається до $A_{i-1}A_i,A_iA_{i+1},A_{i+1}A_{i+2}$ та лежить зовні чотирикутника. T_i - точка дотику ω_i до A_iA_{i+1}. Довести, що A_1A_2,A_3A_4 та T_2T_4 перетинаються в одній точці тоді ілише тоді, коли в 1 точці перетинаються A_2A_3,A_4A_1,T_1T_3.

8) ω - коло вписане в трикутник ABC, т. K - точка дотику ω до AC. H - середина висоти BD. Пряма KH перетинає ω в точці N. Довести, коло описане навколо ANC дотикається до ω.

9) Через точку P всередині трикутника ABC проведено AA_1,BB_1,CC_1, P_1 - точка всередині $A_1B_1C_1$. Нехай $A_2=A_1P_1\cap B_1C_1$, B_2,C_2 - аналогічно. Довести, AA_2,BB_2,CC_2 перетинаються в 1 точці.

10) У трикутнику ABC проведено бісектриси BB_0,CC_0. Вони перетинають описане коло трикутника ABC в точках A_1,B_1. Нехай B_0C_0 та B_1C_1 перетинаються в точці X. Нехай I - інцентр. Довести, $XI\parallel AB$.

11) Нехай AA_2,BB_2 - діаметри описаного кола ABC, що перетинають сторони трикутника в A_1,B_1. Нехай H - точка перетину A_2B_1 та A_1B_2. Довести, $CH\perp AB$.

12) Коло ω вписане в трикутник ABC дотикається до AB,BC,CA в точках K,L,M. На меншій дузі KL кола ω вибрано точку S. Позначимо $P=AS\cap KM, Q=ML\cap SC$, $R=LP\cap KQ, T=AQ\cap PC$. R,S,M - лежать на одній прямій. Довести, T лежить на SM.

13) ABC - нерівнобедрений трикутник. D,E,F - середини сторін BC,CA,AB. P - точка перетину кола BCF та BE, Q - точка перетину кола ABE та AD. R - перетин DP та FQ. Довести, $GPQR$ лежать на одному колі, де G - центроїд ABC.
14) H,O - ортоцентр та центр описаного кола трикутника ABC. Довести, існують D,E,F на сторонах BC,CA,AB, що $OD+DH=OE+EH=OF+FH$ та прямі AD,BE,CF перетинаються в одній точці.
15) I - центр вписаного кола трикутника ABC, ω - описане коло трикутника ABC. AI,BI перетинають ω в точках D,E. $DE\cap AC=F$, $DE\cap BC=G$. P - перетин прямої через F паралельно до AD і прямої через G паралельно BE. Нехай дотичні в A,B перетинаються в точці K. Довести, AE,BD,KP перетинаються в 1 точці.
16) Нехай M внутрішня точка бісектриси AL трикутника ABC. Через L проведено довільну пряму, що перетинає AB в точці P та продовження сторони AC за точку C в точці Q. Нехай $N=BM\cap PQ$, $K=QM\cap BC$. Довести $\angle NAL=\angle KAL$.
17) H - точка перетину висот AP,CQ в трикутнику ABC. На медіані BM відмітили E,F, що $\angle APE=\angle BAC$ та $\angle CQA=\angle BCA$, E всередині APB та F всередині CQB. Довести, AE,CF,BH перетинаються в одній точці.
18) ABC - рівнобедрений, $AB=AC$. D - середина AC. Бісектриса $\angle BAC$ перетинає коло через D,B,C в точці E, що лежить всередині трикутника ABC. BD перетинає коло через A,E,B в точках B,F. $AF\cap BE=I, CI\cap BD=K$. Довести I - інцентр KAB.
19)Трикутник ABC прямокутний, з $\angle C=90^\circ$. D - основа висоти з вершини C. X - внутрішня точка відрізку CD. K - точка на AX, що $BK=BC$, L - на BX, що $AL=AC$. M - точка перетину AL та BK. Довести, $MK=ML$.
20) D - основа бісектриси з вершини A на BC, E - точка симетрична D відносно середини BC. O - центр описаного кола трикутника ABC. X -перетин AD з перпендикуляром до BC в точці E, Y - перетин AO з перпендикуляром до BC в точці D. Довести, що B,C,X,Y - на одному колі.

Маси. Момент інерції

1) $ABCD$ - чотирикутник. M_A - точка перетину медіан BCD, M_B,M_C,M_D - визначаються аналогічно. Довести, AM_A,BM_B,CM_C,DM_D перетинаються в 1 точці.
2) Довести, G,O,H - на одній прямій.
3) N - точка Нагеля. Довести, G,N,I - на одній прямій.
4) В коло вписано чотирикутник з перпендикулярними діагоналями. Довести, точка перетину середніх ліній ділить навпіл відрізок, що з»єднує точку перетину діагоналей з центром кола.
5) На сторонах AB,BC,CD,DA вибрано P,Q,R,S так, що $AP:PB=DR:RC=\alpha$ та $BQ:QC=AS:SD=\beta$. Знайти в якому відношенні діляться SQ та PR т. перетину.
6)На колі розташовані 6 точок. Обираються 3, береться точка перетину медіан трикутника з вершинами в цих 3 точках, та точка перетину висот трикутника з вершинами в інших 3 т., і розглядається відрізок, що їх з»єднує. Довести, всі 20 таких відрізків перетинаються в 1 т.
7) Формула Стюарта: Нехай D - точка на стороні BC, що $BD:DC=p:q$. Сторони трикутника відповідно a,b,c. Знайти AD.
8) Формула Ейлера: $OI^2=R^2-2Rr$.
9)Теорема Фейєрбаха: Коло 9 точок дотикається до вписаного кола та 3 зовнівписаних.