Теорія чисел

1) Довести, існує нескінченно багато n, що $2^n+2 \vdots n$.
2) Довести, для довільного a існує нескінченно багато n, що $a^n+1 \vdots n$.
3) Довести, що для різних натуральних a,b,c існує n, що $a+n, b+n, c+n$ - попарно взаємнопрості.
4) Довести існують арифметичні послідовності довільної довжини з додатньою різницею, що всі їх члени є степенями натуральних чисел з показниками більшими 1.
5) Знайти всі прості p, що виконується $2^p+1 \vdots p$.
6) Знайти всі прості p, що $(p-1)!+1=p^m$.
7) Довести, що для довільного $k \neq 1$ існує нескінченно багато n, що $2^{2^n}+k$ складене.
8) Довести існує нескінченно багато k, що $k2^n+1$ - складене при всіх натуральних n.
9) Довести існує нескінченно багато k, що 2^n+k - складене при всіх натуральних n.
10) Знайти всі натуральні n, що $(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3+(n+4)^3=(n+10)^3$.
11) Знайти всі натуральні x, y, що $x(x+1)=4y(y+1)$.
12) Довести, що для простого p рівняння $x(x+1)=y(y+1)p^{2n}$ не має розв'язків в натуральних числах.
13) Знайти всі раціональні корені $x^2+y^2+z^2+x+y+z=1$.
14) Довести, рівняння $4xy-x-y=z^2$ не має розв'язків в натуральних числах, але має нескінченно багато в від'ємних цілих.
15) Розв'язати в цілих $y^2=x^3+(x+4)^2$.
16) Довести, що сума цифр числа 2^n необмежено зростає з ростом n. (тобто починаючи з певного місця сума цифр більша за фіксоване число, і так для кожного числа).
17) Довести, що перші s цифр в запису квадрата натурального числа можуть бути довільними.
18) Знайти всі натуральні x та прості p, що $x \leq 2p$ та $(p-1)^x+1 \vdots x^{p-1}$.
19) Випишемо всі дільники чмсла n: $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$. Довести, $d_1d_2+d_2d_3+\ldots+d_{k-1}d_k<n^2$. Та знайти всі n, для яких виписана сума є дільником числа n^2.
20) $b, n>1\ \forall \mathrm{k}\ \exists \mathrm{a_k}:\ \mathrm{b}\text{-}\mathrm{a_k^n} \vdots k$, довести $b=A^n$, для деякого натурального А.
21) Знайти всі непарні прості p, для яких існує g, що множини $A=\{k^2+1(\mathrm{mod}\, p): k=1,2,..,\frac{p-1}{2}\}$ та $B=\{g^k(\mathrm{mod}\, p): k=1,2,..,\frac{p-1}{2}\}$ співпадають.
22) Довести існує нескінченно багато n, що n^2+1 має простий дільник більший ніж $2n+\sqrt{2n}$.
23) Довести, що рівняння $\frac{x^7-1}{x-1}=y^5-1$ не має розв'язків в натуральних числах.