Тренувальні збори для групи резерву. Теорія чисел: конструкції та інше

Данило Хілько dkhilko@ukr.net

Травень 2016

1. Нехай
$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{a_n}{b_n},$$
де $\frac{a_n}{b_n}$ — нескоротний дріб. Доведіть, що знайдеться нескінченна множина натуральних n, для яких виконується $b_{n+1}<b_n$.

2. Дано зростаючу послідовність натуральних чисел a_n. Відомо, що кожне число починаючи з a_2016 є дільником суми усіх попередніх. Доведіть, що в цій послідовності кожне число, починаючи з деякого моменту, дорівнює сумі всіх попередніх.

3. Гриша задумав ціле число більше 100. Васьок називає ціле число $d>1$. Якщо число Гриші ділиться на d, то Васьок виграв, інакше Гриша віднімає d від свого числа і гра продовжується. Називати числа, які вже назвали раніше, забороняється. Коли число Гриші стане від'ємним, Васьок програє. Чи може Васьок діяти так, щоб точно виграти в Гриші?

4. Всі види тваринок, які можна знайти в українських лісах і степах, пронумеровано числами від 2 до 20000. Для кожної пари (різних) видів тваринок запам'ятали найбільший спільний дільник їх номерів, а самі номери загубилися. Чи вдасться для кожного виду тварин відновити його номер?

5. Є три купки цукерок: в першій 51 цукерка, в другій — 49, в третій — 5. Дозволяється об'єднувати будь-які дві купки в одну, а також розділяти купку, що складається з парної кількості цукерок, на дві рівні. Чи можна, виконавши декілька дозволених операцій, отримати 105 купок по одній цукерці?

6. На відрізку $[0; 2002]$ відмічено його кінці і точка з координатою d, де d — взаємно просте з 1001 число. Дозволяється відмітити довільну середину відрізка з кінцями в відмічених точках, якщо її координата ціла. Чи можна, повторивши цю операцію кілька разів, відмітити всі точці на відрізку?

7. На правій шальці терезів лежить щось масою 11111 г. Продавчиня послідовно розкладає по шалькам гирі, перша з яких має масу 1 г, а кожна наступна в два рази важча попередньої. В деякий момент виявилося, що ваги урівноважилися. На якій шальці лежить 16-грамова гиря?

8. Розбійники пограбували караван, в якому був, зокрема, мішок з монетами. Кожна монета коштує цілі число копійок. Виявилося, що яку б монету не відкласти, залишок можна розподілити між розбійниками так, щоб кожний отримав однакову суму в копійках. Доведіть, що якщо відкласти одну монету, то число монет розділиться на число розбійників.

9. Чи існує число, яке ділиться на 2016 і в якому кожна з цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$ зустрічається хоча б по 100 разів.

10. Дано натуральне число n. Доведіть, що знайдуться такі числа a, b, c, що $n^2 < a, b, c < (n+1)^2$ і a^2+b^2 ділиться на c.

11. Доведіть, що кожне натуральне число можна представити у вигляді

$$3^{u_1}2^{v_1} + \cdots + 3^{u_k}2^{v_k},$$

де

$$u_1 > u_2 > \cdots > u_k \geq 0, 0 \leq v_1 < v_2 < \cdots < v_k$$

— цілі числа.

12. Чи існують такі натуральні числа $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100}$, що

$$(a_1, a_2) > (a_2, a_3) > \cdots > (a_{99}, a_{100}).$$

(Через (a, b) позначається найбільший спільний дільник чисел a і b.)

13. Доведіть, що кожне число можна представити як різницю двох натуральних чисел, що мають однакову кількість простих дільників. (Кратність простих дільників не враховується.)

14. Чи існує таке натуральне число n, що десятковий запис числа 2^n починається на 5, а 5^n — на 2?

15. Нескінченна арифметична прогресія $a_1, a_2, \ldots$, що складена з натуральних чисел така, що для довільного n добуток $a_n \cdot a_{n+31}$ ділиться на 2005. Чи правда, що всі члени прогрессії діляться на 2005?

16. Знайти всі натуральні n, у яких є рівно 16 дільників $d_1, d_2 \cdots, d_{16}$ таких, що $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{16} = n$, $d_6 = 18$ і $d_9 - d_8 = 17$.

17. Доведіть, що з довільних шести чотиризначних числа, взаємно простих в сукупності, можна вибрати п'ять, також взаємно простих в сукупності.

18. На шальки терезів поклали гирі вагою $1, 2, \ldots, 100$ так, що є рівновага. Доведіть, що можна зняти по дві гирі з обох шальок так, що рівновага не порушиться.