7-й Київський турнір математичних боїв імені Лесі Рубльової

Математичний бій № 2

Старша ліга

Група A

Умови та розв'язки

1. Нехай x, y, z та a, b, c – додатні дійсні числа, для яких справджуються рівності $x + y + z = a + b + c$ та $xyz = abc$. Відомо, що $\max\{x, y, z\} \geq \max\{a, b, c\}$. Довести нерівність: $ab + bc + ca \geq xy + yz + zx$.

Розв'язання. Без обмеження загальності будемо вважати, що $x \geq y \geq z$ та $a \geq b \geq c$. За умовою $x \geq a$. Розглянемо дві кубічні функції $P(t) = (t - x)(t - y)(t - z)$ та $Q(t) = (t - a)(t - b)(t - c)$. Оскільки $t = a$ найбільший корінь рівняння $Q(t) = 0$, то $Q(t) \geq 0$ $\forall t \geq a$, тому $Q(x) \geq 0$. Зауважимо, що з умов задачі випливає, що $P(t) - Q(t) = (\alpha - \beta)t$, де $\alpha = xy+yz+zx$, $\beta = ab+bc+ca$. Але це означає, що $-Q(x) = P(x)-Q(x) = (\alpha-\beta)x \leq 0$, тобто $\alpha \leq \beta$, що й треба було довести.

2. Послідовність натуральних чисел (a_n) задовольняє такі умови: вона монотонно зростаюча, а також для будь-якої четвірки індексів $1 \leq i < j \leq k < l$, які задовольняють умову $i + l = j + k$, виконується нерівність $a_i + a_l > a_j + a_k$. Знайти найменше можливе значення члена послідовності a_{2010}.

Відповідь: 2019046.

Розв'язання. Оскільки $a_2 - a_1 \geq 1$, та з умови $a_{n+2} - a_{n+1} \geq (a_{n+1} - a_n) + 1$, яка випливає з умов задачі, якщо вибрати таку четвірку індексів: $(n, n + 1, n + 1, n + 2)$. Далі легко показати ММІ, що $a_{n+1} - a_n \geq n \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n + n$, оскільки $a_1 \geq 1$, то можна додати ці нерівності $a_{k+1} \geq a_k + k$ при $k = \overline{1, n-1} \Rightarrow$

$$(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2) \geq (a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1) + ((n-1) + (n-2) + \ldots 1) \quad \Rightarrow$$

$$a_n \geq a_1 + \frac{(n-1)n}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2).$$

Перевіримо, що послідовність $a_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ задовольняє умови задачі. Тобто треба для довільних $1 \leq i < j \leq k < l$, які задовольняють умову $i+l = j+k$, перевірити вірність нерівності $a_i + a_l > a_j + a_k$. Для цієї послідовності треба перевірити, що справджується така умова $i^2 + l^2 > j^2 + k^2$. Позначимо $i+l = j+k = 2d$, тоді $i = d-y$, $l = d+y$, $j = d-x$, $k = d + x$, при цьому $0 \leq x < y \Rightarrow$

$$i^2 + l^2 - j^2 - k^2 = (d-y)^2 + (d+y)^2 - (d-x)^2 - (d+x)^2 = 2y^2 - 2x^2 > 0,$$

що й треба було довести. Таким чином найменше значення a_{2010} досягається для знайденої послідовності, і ми маємо, що цей мінімум дорівнює: $\frac{1}{2}(2010^2 - 2010 + 2) = 2019046$.

3. Нехай зовнівписані кола трикутника ABC дотикаються до сторін AB, BC і CA у точках M, N, P відповідно. Позначимо I, O відповідно інцентр та центр описаного навколо $\triangle ABC$ кіл. Довести, що якщо точки A, M, N, P циклічні, то:

а) точки M, P, I колінеарні;

б) точки I, O, N колінеарні.

Розв'язання. За теоремою Карно перпендикуляри у точках M, N, P відповідно до сторін AB, BC і CA перетинаються у деякій точці X. Тоді чотирикутник $APXM$ – вписаний, коло, що описане навколо $\triangle APM$ перетинає перпендикуляр до BC у точці N відразу у двох точках – N та X, тобто $X = N$, при цьому AN – діаметр цього кола.

а) Позначимо центри звонівписаних кіл через I_A, I_B та I_C, тоді твердження випливає з теореми Паппа для трійок точок I_C, A, I_B та B, N, C.

б) Нехай вписане коло дотикається сторін AB та AC відповідно у точках R та Q. Тоді серединні перпендикуляри до сторін AB та AC співпадають з серединними перпендикулярами до відрізків RM та PQ відповідно. Тому вони перетинаються у середині відрізку IN. Твердження доведене.

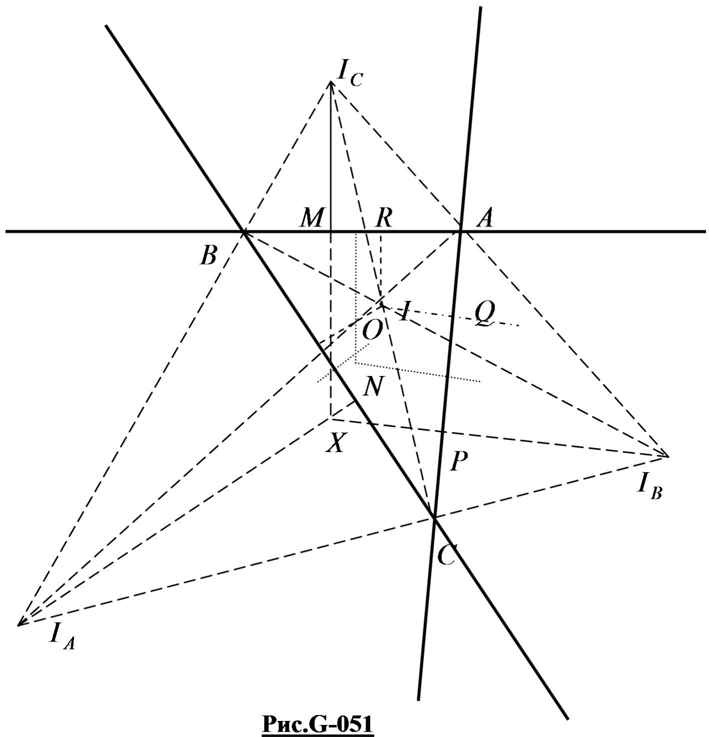


Рис.G-051

4. У трапеції $ABCD$ з основами BC та AD рівні відрізки $AD = BD = CD$ та $\angle BCD = 72°$. На діагоналі BD вибирається точка K, для якої $AK = AD$. Точка M – середина сторони CD, N – точка перетину прямих AM та BD. Довести, що $BK = ND$.

Розв'язання. Нехай $BC = a$, $AD = BD = CD = b$, $K_1 = AC \cap BD$. $\angle ADC = 108°$. З рівності заданих відрізків $\angle CAD = \angle ACD = 36°$, аналоігчно $\angle CBD = \angle BCD = 72° \Rightarrow \angle BDC = 36° \Rightarrow \angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = 72° \Rightarrow \angle AK_1D = 72°$, тобто $\triangle ADK_1$ – рівнобедренний, тому $AD = AK_1 = AK \Rightarrow K = K_1$. За кутами та однаковою стороною $\triangle AKD = \triangle BCD \Rightarrow KD = BC = a \Rightarrow BK = b - a$. Оскільки $\triangle BKC \sim \triangle AKD \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{BK}{KD} = \frac{KC}{AK} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b-a}{a} \Rightarrow b^2 - ab - a^2 = 0$.

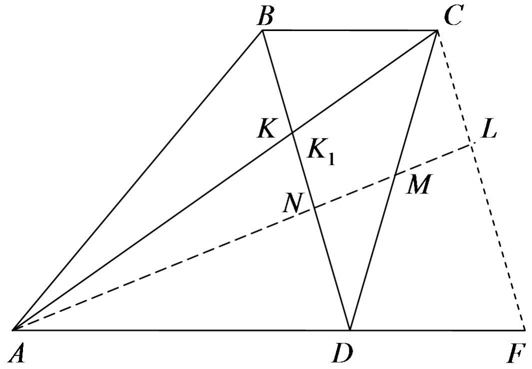


Рис.G-030

Проведемо $CF \parallel BD$, так що $CF = BD$. Точка L – перетин прямих AM та CF. Позначимо $DN = x$, оскільки $\triangle AKN \sim \triangle ACL \Rightarrow \frac{CL}{KN} = \frac{AC}{AK} = \frac{a+b}{b}$, оскільки $\frac{KC}{AK} = \frac{a}{b}$. Тому $KN = CL \cdot \frac{b}{a+b}$. Оскільки $\triangle NDM = \triangle CML$, то $CL = DN$. Тому $a - DN = KN = DN \cdot \frac{b}{a+b}$ $\Leftrightarrow DN = \frac{a(a+b)}{2b+a} = \frac{a^2+ab+2(b^2-ab-a^2)}{2b+a} = \frac{b(2b+a)-a(2b+a)}{2b+a} = b - a = BK$, що й треба було довести.

5. Задано $m \geq 2$ та m натуральних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Довести, що існує нескінченно багато натуральних n, для яких число $a_1 \cdot 1^n + a_2 \cdot 2^n + \ldots + a_m \cdot m^n$ є складеним.

Розв'язання. Нехай p – простий дільник числа $a_1 + 2a_2 + \ldots + ma_m$, тоді за теоремою Ферма $\forall k \leq m$ ми маємо, що $k^p \equiv k \pmod{p}$. Застосувавши метод математичної індукції, отримаємо, що для довільного натурального n $k^{p^n} \equiv k \pmod{p}$ ($k^{p^n} \equiv (k^{p^{n-1}})^p \equiv k^p \equiv k \pmod{p}$). Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_1 \cdot 1^{p^n} + a_2 \cdot 2^{p^n} + \ldots a_m \cdot m^{p^n} \equiv a_1 + 2a_2 + \ldots + ma_m \equiv 0 \pmod{p},$$

а тому число $a_1 \cdot 1^{p^n} + a_2 \cdot 2^{p^n} + \ldots a_m \cdot m^{p^n}$ не є простим.

6. Розв'язати в натуральних числах a, b рівняння $(a-b)^{a+b} = a^a$.

Відповідь: $a = 8, b = 4$.

Розв'язання. Нехай $d = (a, b)$, тоді $a = dx, b = dy$, тоді вихідне рівняння набуває такого вигляду: $d^b(x-y)^{a+b} = x^a$. Оскільки $(x, y) = (x, x-y) = 1$, то $x - y = \pm 1$ та $d^b = x^a$. Продовжимо перетворення і одержимо, що $d^y = x^x$ або $d^{x \pm 1} = x^x$. Легко зрозуміти, що $d = 1 = x$ не дає розв'язків початкового рівняння.

Нехай p – простий дільник d, а тому й x. Припустимо, що $p^\alpha || d$ (це позначення максимального степеня, на яке ділиться відповідне число, аналогічні позначення мають такий вигляд $ord\, p = \alpha$) та $p^\beta || x$. Тоді для виконання рівності ми маємо таку умову: $\alpha(x \pm 1) = \beta x$. Оскільки $(x, x \pm 1) = 1$, то $x|\alpha$. Покладемо $\alpha = x\gamma$, тоді ми одержимо, що $\gamma(x \pm 1) = \beta$.

Якщо $\gamma(x+1) = \beta$, то ми маємо такі співвідношення $x + 1 = kp^\beta + 1 > \beta$ і рівність неможлива.

Якщо $\gamma(x-1) = \beta$, то при умові $\beta > 1$ ми також маємо, що $x - 1 = kp^\beta - 1 \geq 2^\beta - 1 > \beta$, і рівність також неможлива. Залишається єдина можливість $\beta = 1$. Це означає, що $\gamma(x-1) = 1 \Rightarrow \gamma = 1$ та $x = 2$. Далі послідовно знаходимо $\alpha = 2$, $p = 2$, $d = 4$, $y = 1$, $a = 8$ та $b = 4$.

Перевіркою переконуємось, що ця відповідь задовольняє умову.

7. На дошці записані n натуральних чисел, $n \geq 2$. За один крок дозволяється вибрати будь-які два числа і замість кожного з них записати їхню суму. Визначити, при яких n завжди можна досягти ситуації, коли після скінченної кількості кроків усі числа, записані на дошці, виявляться рівними?

Відповідь: n – парне.

Розв'язання. Якщо розглянути такий кортеж (2,2,1,1,1,..., 1,1) для $n \geq 3$, то очевидним стає той факт, що максимальних елементів завжди у наборі буде парна кількість. Таким чином непарні значення n не задовольняють умову. Покажемо, що усі парні значення n задовольняють умову. Доведення проведемо ММІ. Для $n = 2$ усе очевидно. Нехай твердження справджується для деякого парного значення розглянемо наступне значення. За припущенням індукції будь-яку початкову позицію ми можемо перетворити у таку $(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{n-2}, b, b)$. Якщо $a = b$ все доведено. Розглянемо тепер ті типи дій, які ми завжди можемо застосувати до такого кортежу: $(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n-k})$. Тут k завжди парне і може відрізнятись від початкового $k = n - 2$.

Дія α: $(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{2a, 2a, \ldots, 2a}_{k}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n-k})$;

Дія β: $(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{a, a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{2b, 2b, \ldots, 2b}_{n-k})$;

Дія γ_1: $(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{a+b, a+b, \ldots, a+b}_{2k}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n-2k})$ $(k \leq n-k)$;

Дія γ_2: $(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{a, a, \ldots, a}_{2k-n}, \underbrace{a+b, a+b, \ldots, a+b}_{2(n-k)})$ $(k \geq n-k)$.

Для описання нашої процедури подамо натуральне число у такому вигляді $c = 2^{P(c)}N(c)$, де $P(c) \geq 0$, $N(c)$ – непарне.

Застосовуємо до набору $(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n-k})$:

дію α, якщо $P(a) < P(b)$;
дію β, якщо $P(a) > P(b)$;
дію γ_1 або γ_2, якщо $P(a) = P(b)$, тоді зрозуміло, що $N(a) \neq N(b)$.

При виконанні дій α, β числа $N(a), N(b)$ не змінюються, а числа $P(a), P(b)$ стають ближчими одне до іншого. Дії γ_1 або γ_2 змінюють числа $N(a), N(b)$ таким чином: $N(a) \to \frac{1}{2^n}(N(a) + N(b))$ або $N(b) \to \frac{1}{2^n}(N(a) + N(b))$.

Таким чином при застосуванні наших процедур вийде, що значення $\max = \{N(a), N(b)\}$ є не зростаючою величиною. Тому вона стане сталою після скінченої кількості кроків. В цей момент або $N(a) \geq N(b)$, або $N(a) \leq N(b)$. Це виключає в подальшому можливість застосування операції γ_1 або γ_2. Таким чином, ми одержимо деякий кортеж $(a, a, \ldots, a, b, b, \ldots, b)$ і далі вже можна буде застосовувати лише операції α чи β. Застосувавши їх відповідну кількість разів ми одержимо набір $(a', a', \ldots, a', b', b', \ldots, b')$, у якого $P(a') = P(b')$, бо різниця між ними зменшується. Таким чином ми одержали набір, до якого не можна далі застосувати жодну з чотирьох наведених дій. Але це можливе лише за умови $a' = b'$, тобто усі числа рівні, що й треба було довести.

8. У кожній клітині квадратної таблиці 2010×2010 стоїть знак «+» або «−». За один хід дозволяється одночасно поміняти на протилежні знаки в усіх клітинах деякого рядка та деякого стовпчика (знак у клітині, що розташована на перетині обраних рядка та стовпчика, змінюється на протилежний). Чи можна при будь-якому початковому розташуванні знаків за скінченну кількість кроків одержати таблицю, що заповнена лише знаками «+»?

Відповідь: Так, можна при будь-якому.

Розв'язання. Будемо називати (k, l)-ходом, або ходом у (k, l) клітину такий хід, при якому міняються на протилежні усі знаки у k-му рядку та l-му стовпчику, тобто у тому рядку та стовпчику, де розташована обрана клітина.

Назвемо (k, l)-процедурою послідовність з 4019 таких ходів у кожну клітину k-го рядка та l-го стовпчика. Покажемо, що при застосуванні (k, l)-процедури знак у (k, l)-клітині зміниться на протилежний, а у решті клітин – не зміниться.

Справді, у самій (k, l)-клітині знак змінюється після кожного ходу (k, l)-процедури, тобто непарну кількість разів. У кожній іншій клітині k-стовпчика та l)-радка знак змінюється 2010 разів. В усіх інших клітинах таблиці при використанні (k, l)-процедури знак юуде змінюватись двічі, а саме в (i, j)-клітині знак поміняється під час ходів (k, j) та (i, l). Таким чином можна поміняти знак у кожній клітині, де з самого початку стояв знак "-".

Математичний бій № 1

Старша ліга

Група Б

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старша ліга група "А"

2. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких для усіх дійсних x, y виконується рівність:

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Відповідь: $f(x) = x + 1$.

Розв'язання. Зробимо такі підстановки:

$x = y = 0 \Rightarrow (f(0))^2 - f(0) = 0$, звідси $f(0) = 0$ або $f(0) = 1$.

$y = 0 \Rightarrow f(x)f(0) - f(0) = x$ для кожного дійного x. Звідси $f(0) \neq 0$, тому $f(0) = 1$ і відповідно $f(x) = x + 1$.

Перевіркою переконуємось, що ця функція задовольняє умови, і тому є шуканим розв'язком.

3. Всередині квадрата зі стороною 38 розташовані 100 опуклих багатокутників, кожний з яких має площу не більше за π та периметр не більше за 2π. Довести, що всередині цього квадрата можна розташувати круг радіуса 1, який не перетинається з жодним з опуклих багатокутників.

Розв'язання. Центр круга повинен бути розташований у квадраті зі стороною 36, сторони якого відстоять на 1 від сторін заданого квадрату. Як легко зрозуміти, то усі точки які відстоять від заданого опуклого багатокутника T на відстань 1, задають опуклу фігуру Q, як показано на рисунку. Тоді їх площі та периметри пов'язані такою рівністю: $S(Q) = S(T) + P(T) \cdot 1 + \pi \leq 4\pi$. Оточимо кожний із заданих 100 опуклих багатокутників таким одиничним околом, і оцінимо площу усіх таких багатокутників. Вона не перевищує 400π.

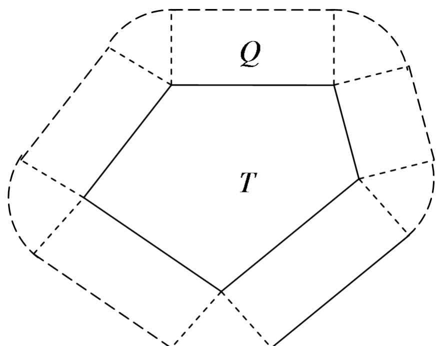


Рис.G-039

Оскільки $400\pi < 36^2$, то буде точка, яка не покрита жодним околом. Тому, можемо побудувати круг з центром у цій точці і він буде вільний від точок заданих 100 багатокутників та розташована всередині квадрату. Що й треба було довести.

4. Задача № 4 старша ліга група "А"

5. Задача № 5 старша ліга група "А"

6. Задача № 6 старша ліга група "А"

7. На площині задано декілька точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Деякі з цих точок з'єднані відрізками таким чином, що з будь-якої точки цієї множини можна по проведених відрізках попасти у будь-яку іншу точку цієї множини, не перескакуючи при цьому всередині відрізка на інший відрізок. Чи завжди з цієї множини можна видалити одну точку разом з усіма відрізками, які виходять з цієї точки, таким чином, щоб залишилась властивість, що з будь-якої точки множини можна попасти у будь-яку іншу по тих відрізках, що залишились у цій множині?

Відповідь: так.

Розв'язання. Спочатку будемо по черзі видаляти відрізки доти, доки граф залишається зв'язним. В ситуації, коли вже не можна видалити жодного відрізку, обов'язково є точка, з якої проведений рівно 1 відрізок. Якщо це не так, тобто з кожної точки проведено принаймні 2 відрізки, то у цьому графі є цикл. Виходимо з будь-якої точки по довільному відрізку і далі при заході у будь-яку точка можна вийти з неї по іншому відрізку. Так робимо, доки в цьому маршруті не повториться якась точка, таким чином і утвориться цикл. Але зрозуміло, що якщо з циклу прибрати будь-яку ланку, то граф залишиться зв'язним. А якщо у графі немає жодного циклу, то це дерево і є вершини (листя) з яких виходить рівно 1 відрізок. Якщо цю вершину прибрати, то властивість зв'язності графа що залишився зберігається, таким чином, нам з самого початку треба прибрати цю вершину.

8. Задача № 8 старша ліга група "А"

Математичний бій № 1

Старша ліга

Група B

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старша ліга група "А"

2. Задача № 2 старша ліга група "Б"

3. Всередині квадрата $ABCD$ обрали довільну точку K. Через вершини A, B, C і D провели перпендикуляри до прямих BK, CK, DK та AK відповідно. Доведіть, що усі ці чотири перпендикуляри перетинаються в одній точці.

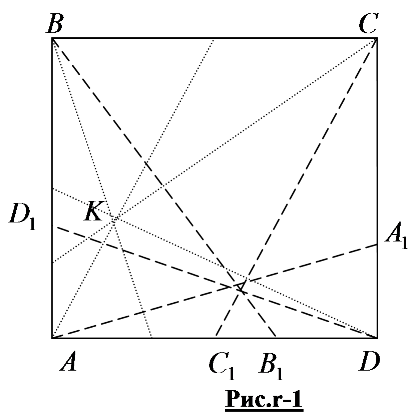


Рис.г-1

Розв'язання. Розглянемо поворот квадрата на 90°, при якому прямі AK, BK, CK та DK перейдуть у проведені перпендикуляри DD_1, AA_1, BB_1 та CC_1 відповідно (рис). При цьому точка K перейде у спільну точку усіх цих перпендикулярів.

4. У трикутнику ABC проведені бісектриси AT та BP, а також висота CH. Відомо, що середина відрізка CH належить відрізку PT. Знайти значення $\cos\angle A + \cos\angle B$.

Відповідь: 1.

Розв'язання. Позначимо сторони та кути трикутника a, b, c та α, β, γ відповідно. Легко помітити, що ні кут α, ні кут β не може бути тупим (тоді б відрізки CH і PT не перетиналися) або прямим (тоді PT перетинав би CH не в середині). Тому $\cos\alpha > 0$ та $\cos\beta > 0$.

Помістимо у вершини трикутника відповідні маси: $A \to a\cos\beta$, $B \to b\cos\alpha$, $C \to c(\cos\alpha + \cos\beta)$. Тоді центр мас точок $A(a\cos\beta)$ та $C(c\cos\beta)$ буде точка $P((a+c)\cos\beta)$, аналогічно центр мас точок $B(b\cos\alpha)$ та $C(c\cos\alpha)$ буде точка $T((b+c)\cos\alpha)$.

Тому центром ваги усіх вершин трикутника буде точка, що належить відрізку PT. З іншого боку, оскільки $a\cos\beta + b\cos\alpha = c$, то $H(c)$ буде центр ваги точок $A(a\cos\beta)$ та $B(b\cos\alpha)$, тобто центр ваги знаходиться на відрізку CH. Таким чином, центром мас є точка $K = TP \cap CH$. Оскільки $CK = KH$, то у точках $H(c)$ та $C(c(\cos\alpha + \cos\beta))$ зібрані однакові маси, тому $\cos\alpha + \cos\beta = 1$.

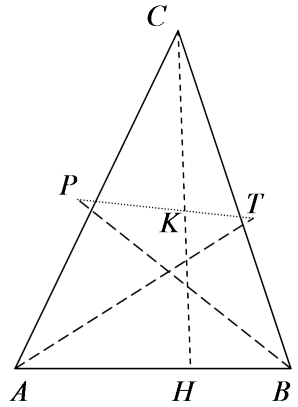


Рис.G-027

5. Число $\overline{abc}$ – просте. Доведіть, що число $b^2 - 4ac$ не є квадратом натурального числа.

Розв'язання. Припустимо, що $b^2 - 4ac = n^2$, тоді квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має раціональні корені $\frac{-b\pm n}{2a}$. Тому

$$N = 4a(ax^2 + bx + c) = (2ax + b + n)(2ax + b - n).$$

якщ0о тепер підставити в цю рівність число $x = 10$, то $ax^2 + bx + c = \overline{abc}$, звідки $N = (20a+b+n)(20a+b-n)$ ділиться на просте число $\overline{abc}$, але тоді $20a+b+n \geq 100a+10b+c$, що неможливо, оскільки $n < b$. Одержана супеперечність завершує доведення.

6. Задача № 6 старша ліга група "А"

7. Задана таблиця 3×3, в яку зліва направо у першому рядку записані числа 1, 2, 3, у другому рядку записані зліва направо 4, 5, 6 і у третьому рядку – зліва направо числа 7, 8, 9. За один хід дозволяється вибрати в цій таблиці довільний квадратик 2×2 і збільшити у ньому деякі два числа, що стоять по діагоналі, на 1, а два інших числа, що також стоять по діагоналі, – зменшити на 1. Яка найбільша кількість однакових чисел може стояти у цій таблиці після декількох таких ходів?

Відповідь: 6.

Розв'язання. Після кожного ходу сума чисел у кожному рядку та стовпчику не змінюються. Суми по рядках складають 6, 15 та 24, а по стовпчиках – 12, 15 та 18 відповідно, і вони протягом ходів не змінюються. Припустимо, що там утворилося принаймні 7 рівних чисел, позначимо їх через a. Решта два числа розташовані у різних рядках та стовпчиках, бо інакше будуть два рядки чи стовпчики з трьох однакових чисел a, а тому і суми там були б рівними, чого не повинно бути.

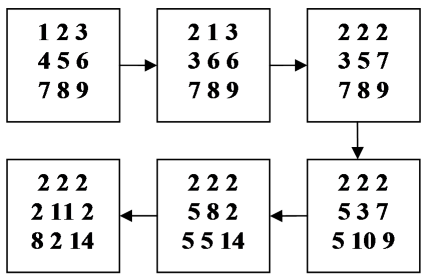


Рис.г-2

Але тоді для цих чисел, відмінних від a у рядках та стовпчиках повинні бути рівними суми чисел. Тобто повинно існувати дві пари рядків та стовпчиків з рівними сумами, а така пара існує лише одна. Одержана суперечність показує, що більше за 6 рівних чисел утворитись не може.

Для 6 рівних чисел треба навести приклад. Один з таких прикладів на рис.

8. На дошці записано декілька натуральних чисел. За один хід дозволяється витерти два довільних числа a, b та записати замість них їхні НСК $[a, b]$ та НСД (a, b), за умови, що принаймні одне з цих чисел відмінне і від a, і від b. Доведіть, що через скінченну кількість кроків вже не можна буде зробити жодного ходу.

Розв'язання. Оскільки добуток чисел на дошці не змінюється, то якщо одне з чисел не співпадає ні з a, ні з b, то друге число також відмінно від них. Покажемо, що при кожному ході на дошці збільшується сума чисел, які на ній записані. Дійсно, нехай замість пари a, b на дошці записується a_1, b_1, при цьому без обмеження загальності будемо вважати, що $a_1 > a > b > b_1$, оскільки $[a, b] \geq a$, а за наших умов $[a, b] > a$. Крім того, $a \neq b$, оскільки для рівних чисел пара чисел не змінюється, що також неможливо за умовою.

Доведемо, що при кожному ході збільшується сума записаних на дошці чисел. Нехай $S = ab = a_1b_1$, покажемо, що $a_1 + b_1 > a + b$. Зробимо низку еквівалентних перетворень: $a_1 - a > b - b_1 \Leftrightarrow a_1 - a > \frac{S}{a} - \frac{S}{a_1} \Leftrightarrow a_1 - a > \frac{S(a_1-a)}{aa_1} \Leftrightarrow 1 > \frac{S}{aa_1} \Leftrightarrow aa_1 > S$, а остання нерівність виконується, оскільки $a_1a > a_1b_1 = S$. Таким чином доведено, що сума чисел збільшується при кожному ході. Але при постійному добутку сума не може збільшуватись нескінченно довго, завжди є максимум, який вона може досягти. Якщо добуток n натуральних чисел постійний і дорівнює P, то жодне з цих чисел не перевищує P, а отже їхня сума обмежена й не перевищує nP. Таким чином через скінченну кількість кроків не можна буде зробити жодного ходу.

Математичний бій № 1

Середня ліга

Група А

Умови та розв'язки

1. Знайти усі натуральні n, для яких вираз $x^n + y^n + z^n$ є сталим для усіх $x, y, z \in \mathbb{R}$, що задовольняють умови $x + y + z = 0$ та $xyz = 1$.

Відповідь: $n = 1$ та $n = 3$.

Розв'язання. Позначимо через $S_n = x^n + y^n + z^n$. Для $n = 1$ усе очевидно за умовою. Якщо $n = 3$ маємо $S_3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) + 3xyz = const$.

Таким чином залишається розглянути решту натуральних n. Для цього розглянемо такі дві трійки (x, y, z), які задовольняють умови: $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{4}\right)$ та $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, -1\right)$. Перевіримо, що усі S_n на цих наборах різні. Дійсно, S_n для другого набору завжди ціле число (оскільки $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ – корені рівняння $x^2 = x + 1$, то $(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})^n = (\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})^{n-1} + (\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})^{n-2}$ і $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + (-1)^n$ – завжди ціле), а от для іншого набору ціле лише при $n = 1$ та $n = 3$, бо дорівнює $\left(\sqrt[3]{4}\right)^n + 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^n$.

2. Задача № 2 старша ліга група "А"

3. Задача № 3 старша ліга група "А"

4. Задача № 4 старша ліга група "А"

5. Задача № 5 старша ліга група "А"

6. Знайти усі такі натуральні $n \geq 2$ та усі попарно різні прості числа p, q, r, які мають таку властивість: як тільки для деяких попарно різних цілих чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ виконується умова, що кожна різниця $a_j - a_k$ при $1 \leq j < k \leq n$ ділиться принаймні на одне з простих чисел p, q, r, то одне з цих чисел p, q, r ділить кожну з наведених різниць $a_j - a_k$ при $1 \leq j < k \leq n$.

Відповідь: $n = 2$, p, q, r – довільні різні прості числа.

Розв'язання. Якщо $n = 2$, то твердження задачі очевидне для довільних простих p, q, r.

Покажемо, що результат хибний для усіх $n \geq 3$. Нехай $n = 3$ і $p < q < r$ – прості числа. Покладемо $a_1 = 1$, $a_2 = r + 1$. Розглянемо такі числа $(r + jq)$, $j = \overline{1, p}$. Одне з цих чисел ділиться на p, скажемо, що це число $r + lq$. Нехай тоді число $a_3 = r + lq + 1$. Тоді число $a_3 - a_1 = r + lq$ ділиться на p, різниця $a_3 - a_2 = lq$ ділиться на q, і різниця $a_2 - a_1 = r$ ділиться на r. Зрозуміло, що жодне з чисел p, q, r не ділить кожну з різниць.

Для $n > 3$ розглянемо значення a_1, a_2, a_3 як і раніше, а число $a_j = pqr(j - 3) + 1\ \forall j \geq 4$. Легко показати, що кожна з різниць $a_j - a_k$ ділиться принаймні на одне з чисел p, q, r, але жодне з цих чисел p, q, r не ділить кожну з наведених різниць.

7. Задача № 7 старша ліга група "Б"

8. Задача № 8 старша ліга група "А"

Математичний бій № 1

Середня ліга

Група Б

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 середня ліга група "А"

2. Дійсні числа a, b задовольняють умову $a^3+b^3=8-6ab$. Яких значень може набувати сума $a+b$?

Відповідь: 2 та -4.

Розв'язання. Оскільки $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, то задану в умові рівність можна переписати у вигляді

$$(a+b)^3-8-3ab(a+b)+6ab=0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$(a+b-2)(a^2+b^2-ab+2a+2b+4)=0.$$

Звідси бачимо, що або $a+b-2=0$ або $a^2+b^2-ab+2a+2b+4=0$. Перша рівність дає першу відповідь. З другою рівністю зробимо такі перетворення:

$$a^2+b^2-ab+2a+2b+4=\left(\frac{1}{2}a^2-ab+\frac{1}{2}b^2\right)+\left(\frac{1}{2}a^2+2a+2\right)+\left(\frac{1}{2}b^2+2b+2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(a+2)^2+\frac{1}{2}(b+2)^2=0.$$

Остання рівність можлива лише за умови, що $a=b=-2$, звідки маємо другу відповідь.

3. Задача № 3 старша ліга група "Б"

4. Задача № 4 старша ліга група "В"

5. Задача № 5 старша ліга група "В"

6. Задача № 6 середня ліга група "А"

7. Задача № 7 старша ліга група "Б"

8. Задача № 8 старша ліга група "В"

Математичний бій № 1

Молодша ліга

Група А

Умови та розв'язки

1. Знайдіть значення виразу

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c-2),$$

якщо відомо, що

$$a+b+c=a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=\frac{2011}{2010}.$$

Відповідь: 3.

Розв'язання. Позначимо через $s=a+b+c$, тоді нам треба знайти значення виразу $P=\frac{ab+bc+ca}{abc}(a+b+c-2)$, далі визначимо через s усі ці вирази, що сюди входять.

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}((a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2))=\frac{1}{2}(s^2-s)=\frac{1}{2}s(s-1).$$

З рівності $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ знаходимо, що $abc=\frac{s(s-1)(s-2)}{6}$. Звідси остаточно

$$P=\frac{3s(s-1)}{s(s-1)(s-2)}(s-2)=3.$$

Зауваження. Учасникам не треба було доводити існування відповідних чисел a, b, c, які задовольняють відповідні умови. Ця трійка повинна задовольняти кубічне рівняння

$$x^3 - sx^2 + \frac{s(s-1)}{2}x - \frac{s(s-1)(s-2)}{6} = 0.$$

Шляхом диференціального числення можна показати, що це рівняння має три попарно різні розв'язки, якщо $s \in (1; 2)$.

2. Задача № 2 середня ліга група "Б"

3. Чи можна усю площину повністю замостити квадратами, які не накладаються один на інший та серед яких щонайбільше є 2 рівних?

Відповідь: так.

Розв'язання. Приклад, як це можна зробити зображений на рис. Подальше заповнення усієї площини квадратами очевидне, як і той факт, що квадрати задовольняють умову.

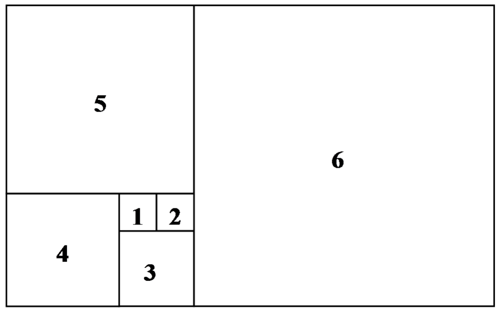


Рис.г-3

4. У опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle DAB = \angle ABC < 90°$, а сторони $AD = 3, BC = 1$. Доведіть, що $DC > 2$.

Розв'язання. Продовжимо сторони AD та BC до їх перетину у точці S, таким чином утворився рівнобедрений трикутник ASB. Нехай $AS = BS = a > 3$. Розглянемо $\triangle CDS$, з нерівності трикутника для нього маємо $CD + DS > CS$, звідси маємо, що $a - AD + CD > a - BC$ або $a - 3 + CD > a - 1$ звідки й маємо шукану нерівність.

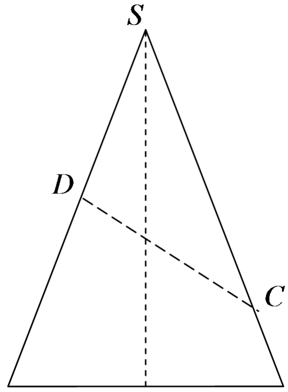


Рис.г-4

5. У 8-му класі навчається 29 школярів, серед яких більше ніж 15 дівчат. Якось весь клас пішов до театру, під час першого антракту кожен хлопчик купив цукерку, а кожна дівчинка – морозиво. Під час другого антракту вже кожен хлопчик купив морозиво, а кожна дівчинка – цукерку. Як підрахували діти, під час другого антракту вони витратили на 6 гривень 20 копійок більше, ніж під час першого. Скільки хлопчиків навчається в класі?

Відповідь: 12.

Розв'язання. Нехай хлопчиків було x, тоді дівчат – $29 - x$. Тому різниця у 620 копійок виникла за рахунок того, що решта дівчинок (тобто на скільки їх більше, ніж хлопчиків) $29-2x$ заплатили за цукерку більше, ніж за морозиво. Тобто має місце рівняння $(29 - 2x)a = 620 = 2^2 \cdot 5 \cdot 31$. Оскільки число $29 - 2x$ – натуральне і непарне, менше від 29, крім того воно дільник числа 620. Варіант $29 - 2x = 1$ відпадає через те, що $x < 14$. Таким чином залишається єдина можливість $29 - 2x = 5$, звідки й знаходимо шукану кількість хлопчиків $x = 12$.

6. Задача № 6 середня ліга група "А"

7. Задача № 7 старша ліга група "В"

8. Задача № 8 старша ліга група "В"

Математичний бій № 1

Молодша ліга

Група Б

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 молодша ліга група "А"

2. Знайдіть найменше можливе значення x, для якого виконується рівність

$$x = a + b + c = d + e + f,$$

де a, b, c, d, e, f – попарно різні натуральні числа.

<u>Відповідь:</u> 11.

<u>Розв'язання.</u> Оскільки $2x = a + b + c + d + e + f \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, то $x \geq 11$. А для $x = 11$ достатньо навести відповідний приклад:

$$11 = 2 + 4 + 5 = 1 + 3 + 7.$$

3. Задача № 3 молодша ліга група "А"

4. Задача № 4 молодша ліга група "А"

5. Задача № 5 молодша ліга група "А"

6. Натуральні числа a, b, c задовольняють рівність

$$a^2 + b^2 + 2bc = 8c^2.$$

Доведіть, що число a – складене.

<u>Розв'язання.</u> Простими перетвореннями одержимо, що

$$a^2 = (2c - b)(4c + b).$$

Припустимо, що число a – просте. Тоді a^2 на два множники можна розкласти лише як $a^2 \cdot 1$, $a \cdot a$, $1 \cdot a^2$. Оскільки $2c - b < 4c + b$, то можливий лише варіант $2c - b = 1$ та $4c + b = a^2$. Звідси випливає, що $a^2 + 1 = 6c$. Але добре відомо, що квадрат по модулю 3 дає остачі 0 та 1, тому $a^2 + 1$ не може ділитись на 3, що суперечить останній рівності.

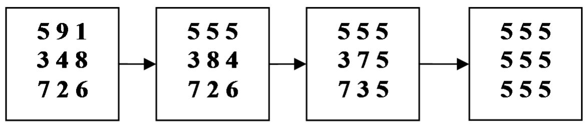
Зауважимо, що трійки чисел, які задовольняють умову, існують. Наприклад, $a = 9, b = 7, c = 5$.

7. Задана таблиця $n \times n$, в яку записані числа $1, 2, \ldots, n^2$ (кожне число записане рівно 1 раз). За один хід дозволяється вибрати в цій таблиці довільний квадратик 2×2 і збільшити у ньому деякі два числа, що стоять по діагоналі, на 1, а два інших числа, що також стоять по діагоналі, – зменшити на 1. Чи можна при деякому початковому розташуванні чисел у таблиці одержати таблицю, в якій усі числа рівні між собою, якщо:

а) $n = 3$;
б) $n = 4$?

<u>Відповідь:</u> а) так; б) ні.

<u>Розв'язання.</u> а) Потрібний приклад наведено на рис.



<u>Рис.г-5</u>

б) При таких операціях не змінюється сума чисел у кожному рядку та стовпчику, таким чином, щоб подібна операція вдалася, треба, щоб з самого початку сума чисел у кожному рядку та стовпчику співпадали. Крім того, наприкінці у таблиці усі числа однакові, тому сума усіх чисел повинна бути кратною 16. Але, якщо обчислити суму усіх чисел таблиці з самого початку, то маємо, що вона дорівнює $1 + 2 + \ldots + 16 = 136 = 17 \cdot 8$, не кратне 16. Звідси й випливає відповідь на цей пункт.

8. Задача № 8 старша ліга група "В"