Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

LVI Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Перший день

Є тільки одне благо – знання
й одне зло – неуцтво.
Сократ

8 клас

8.1. Олеся вибрала п'ять чисел з множини $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Вона повідомила їх добуток Павлику і попросила його визначити парність суми обраних нею чисел. Павлик відповів, що він не може цього зробити однозначно. Яким міг бути добуток обраних Олесею чисел?

Ясінський В'ячеслав

Відповідь: 420.

Розв'язання. Добуток обраних Олесею чисел, однозначно визначається добутком двох чисел, які не були обраними. Маючи у своєму розпорядженні добуток обраних чисел, Павлик може знайти добуток двох не обраних чисел. Оскільки він заявив, що не може визначити парність суми обраних чисел, то це означає, що не можна визначити самі не обрані числа, знаючи лише їх добуток. Знайдемо усі добутки двох чисел із даної множини:

$$1\cdot 2=2,\ 1\cdot 3=3,\ 1\cdot 4=4,\ 1\cdot 5=5,\ 1\cdot 6=6,\ 1\cdot 7=7,\ 2\cdot 3=6,\ 2\cdot 4=8,$$
$$2\cdot 5=10,\ 2\cdot 6=12,\ 2\cdot 7=14,\ 3\cdot 4=12,\ 3\cdot 5=15,\ 3\cdot 6=18,\ 3\cdot 7=21,$$
$$4\cdot 5=20,\ 4\cdot 6=24,\ 4\cdot 7=28,\ 5\cdot 6=30,\ 5\cdot 7=35,\ 6\cdot 7=42.$$

Серед усіх добутків двох чисел із даної множини, є лише два, які зустрічаються більше одного разу. Це $1\cdot 6=6=2\cdot 3$ і $2\cdot 6=12=3\cdot 4$. Припустимо, що добуток двох не обраних чисел дорівнював 6. В обох випадках сума цих двох чисел – непарна: $1+6=7$ і $2+3=5$. Але тоді сума обраних чисел також буде непарною, бо сума усіх семи чисел – парна. Це означало б, що у цьому випадку він міг би виконати завдання Олесі, що суперечить умові задачі. Отже, у Павлика добуток двох не обраних чисел міг дорівнювати лише 12. Дійсно, тоді сума не обраних чисел могла бути парною ($2+6=8$), а могла бути й непарною ($3+4=7$). Тому, добуток вибраних п'яти чисел дорівнював $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{12}=420$.

8.2. У гострокутному трикутнику ABC з кутом $\angle ACB=60^\circ$ проведені бісектриса BL та висота BH. З точки L на сторону BC опущений перпендикуляр LD. Знайдіть кути ΔABC, якщо виявилося, що $AB \parallel HD$.

(Гоголєв Андрій)

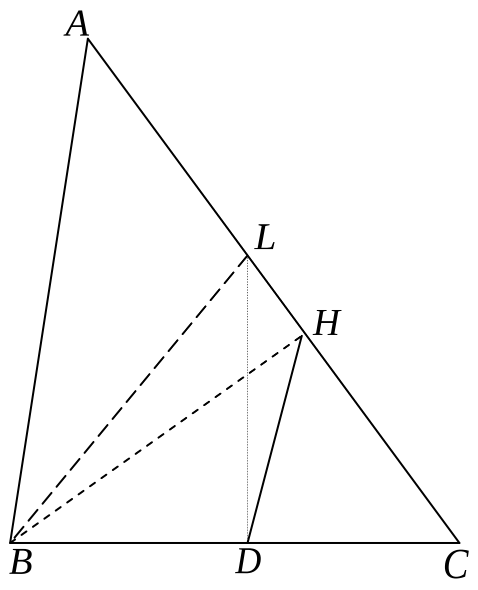

Рис. 1

Відповідь: $\angle BAC=40^\circ$, $\angle ABC=80^\circ$.

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок, коли точка L розташована на відрізку AH (рис. 1). Оскільки $\angle LHB=\angle LDB=90^\circ$, то чотирикутник $BLHD$ є вписаним. Тоді, $\angle LBD = \angle DHC$. З іншого боку $\angle LBD = \angle LBA$, оскільки BL бісектриса трикутника, а $\angle DHC = \angle BAC$, оскільки $AB \| HD$. Таким чином, $\angle ABC = 2\angle BAC$ та $\angle ABC + \angle BAC = 180° - 60° = 120°$. Звідси знаходимо, що $\angle BAC = 40°$ та $\angle ABC = 80°$.

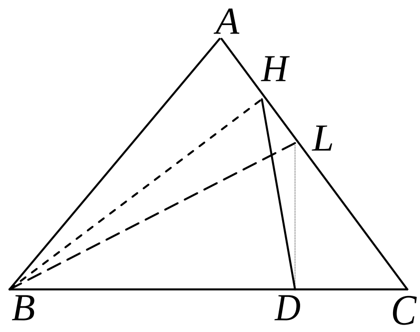
Рис. 2

Припустимо тепер, що точка H розташована на відрізку AL (рис. 2). Тоді чотирикутник $BHLD$ є вписаним (оскільки $\angle LHB = \angle LDB = 90^0$). Помітимо, що $\angle LBD = \angle DHL$ і знову $\angle LBD = \angle LBA$, оскільки BL бісектриса трикутника, а $\angle DHL = \angle BAC$, оскільки $AB \| HD$. Знову, як і в попередньому випадку, отримуємо $\angle BAC = 40°$ та $\angle ABC = 80°$. Але тоді випадок який ми розглядаємо не можливий. Дійсно, якщо $\angle ACB = 60° > \angle BAC = 40°$, то точка H не може належати відрізку AL.

8.3. При яких натуральних n число N також є натуральним, де

$$N = \frac{2\cdot 1}{\sqrt{1^2+1+4}+\sqrt{1^2-1+4}} + \frac{2\cdot 2}{\sqrt{2^2+2+4}+\sqrt{2^2-2+4}} + \ldots + \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+4}+\sqrt{n^2-n+4}} ?$$

(Анікушин А., Рубльов Б.)

<u>Відповідь</u>: $n = 3$.

<u>Розв'язання.</u> Зробимо перетворення загального члена суми, використовуючи множення на спряжене:

$$\frac{2k}{\sqrt{k^2+k+4}+\sqrt{k^2-k+4}} = \frac{(\sqrt{k^2+k+4}-\sqrt{k^2-k+4})2k}{(k^2+k+4)-(k^2-k+4)} =$$

$$= \sqrt{k^2+k+4}-\sqrt{k^2-k+4} = \sqrt{k^2+k+4}-\sqrt{(k-1)^2+(k-1)+4}.$$

Далі зробимо перетворення числа N:

$$N = (\sqrt{6}-\sqrt{4}) + (\sqrt{10}-\sqrt{6}) + (\sqrt{16}-\sqrt{10}) + \ldots + (\sqrt{n^2+n+4}-\sqrt{(n-1)^2+(n-1)+4}) =$$

$$= \sqrt{n^2+n+4}-\sqrt{4} = \sqrt{n^2+n+4}-2.$$

Таким чином, число N буде цілим тоді і тільки тоді, коли вираз n^2+n+4 є точним квадратом. Оскільки $n^2 < n^2+n+4 < n^2+4n+4 = (n+2)^2$, при будь-якому натуральному n, то має виконуватися рівність $n^2+n+4 = (n+1)^2 = n^2+2n+1$. Звідси єдине можливе значення $n = 3$.

8.4. У квадраті $n \times n$, що розбитий на n^2 клітинок, у деякій клітині лежить n^2 фішок. За один крок дозволяється з клітини, у якій знаходиться не менше двох фішок, пересунути по одній фішці у дві клітини, що симетричні відносно даної та мають з нею принаймні одну спільну точку. Чи можливо, щоб через декілька кроків у кожній клітині квадрату знаходилося рівно по одній фішці, якщо:

а) $n = 2016$; ***б)*** $n = 2017$?

(Сердюк Назар)

<u>Відповідь:</u> а) не можливо; ***б)*** можливо.

<u>Розв'язання</u>. а) Розглянемо квадрат $n \times n$, для довільного n. Пронумеруємо стовпчики зліва направо числами $1; 2; \ldots; n$. Для кожної клітини квадрату її вагою вважатимемо номер стовпчика, в якому вона знаходиться. Вагою фішки у деякий момент назвемо вагу тієї клітини, в якій вона зараз розташована. Вагою усього квадрату у деякий момент назвемо сумарну вагу усіх n^2 фішок у цей момент. Неважко збагнути, що при кожному з чотирьох можливих типів ходів сумарна вага квадрату не змінюється. У кінцевій позиції сумарна вага квадрату дорівнює

$$n + 2n + \ldots + n^2 = n \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

У початковій позиції, якщо усі фішки лежать у одній клітини, яка розташована у стовпчику з номером l, сумарна вага таблиці дорівнює $l \cdot n^2$.
Для $n = 2016$, рівність неможлива для цілих l.

б) Для $n = 2017$ з попередніх міркувань стає зрозумілим, що це можливо лише за умови, що на початку усі фішки розташовані у центральній клітин. Далі неважко показати алгоритм ходів, при яких це можливо. Покажемо, як це зробити, наприклад в центральному рядку. Виберемо 2017 фішок та будемо ходити тільки горизонтальними ходами доки це можливо. Якщо на якійсь клітині є більше двох фішок ми робимо хід. Рух припиниться, коли на кожній клітині буде рівно по одній фішці. Перенумеруємо клітини рядка зліва направо числами $2^1; 2^2; \ldots; 2^{2017}$. Вагою фішки знову будемо називати вагу тієї клітини, в якій вона зараз розташована. Вагою усього рядка назвемо сумарну вагу усіх 2017 фішок. При кожному ході вага рядка зменшується, дійсно

$$2 \cdot 2^k - (2^{k-1} + 2^{k+1}) = 2^{k-1}(4 - 1 - 4) = -2^{k-1},$$

а оскільки усього позицій скінченна кількість, то настане розстановка, при якій жодного ходу зробити не можна, а це як раз позиція, коли в кожній клітинці рівно по одній фішці.
Тепер легко зрозуміти, як заповнити весь квадрат. У центральній клітини поєднаємо фішки в купи по 2017 фішок. Таких купок буде рівно 2017. Далі просто ці групи розподіляємо по одній групі у кожну клітину центрального стовпчика. Після цього заповнюємо кожний рядок за наведеним алгоритмом.

<u>9 клас</u>

9.1. Чи можна подати число 2016 у вигляді суми кубів:

а) трьох натуральних чисел;

б) чотирьох натуральних чисел?

(Рожкова Марія)

<u>Відповідь</u>: а) не можна; ***б)*** можна.
<u>Розв'язання</u>. б) Достатньо навести приклад: $2016 = 1000 + 1000 + 8 + 8$.

а) Оскільки $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, то розглянемо куби за модулем 7. Вони можуть дорівнювати 0 або ± 1. Тому при шуканому поданні $2016 = x^3 + y^3 + z^3$ принаймні одне з чисел кратне 7. Але для натуральних чисел таку умову може задовольняти лише число 7, бо $7^3 = 343 < 2016$, а вже $14^3 = 2744 > 2016$.

Таким чином, інші два доданки повинні задовольняти умову: $y^3 + z^3 = 1673$.

Далі можна йти одним з таких варіантів, або скористатися тим, що $1673 = 7 \cdot 239$, де 239 -- просте число. Тоді при розкладі на множники $y^3 + z^3 = (y+z)(y^2 - yz + z^2)$ треба буде перебрати зовсім мало варіантів.

Але ще простіше розглянути такий перебір. Нехай $y \le z$, оскільки $12^3 = 1728 > 1673$, то $z \le 11$. Крім того, $1673 = y^3 + z^3 \le 2z^3$, тому $837 \le z^3$, тобто $10 \le z$. Перебір цих варіантів очевидний і показує, що шуканого подання не існує.

9.2. Бісектриса кута $\angle ABC$ трикутника ABC перетинає описане коло трикутника в точці K. Точка N належить відрізку AB, при цьому $NK \perp AB$. Через точку P – середину відрізка NB – проведена пряма, що паралельна прямій BC, яка перетинає пряму BK в точці T. Доведіть, що пряма NT ділить відрізок AC навпіл.

(Нагель Ігор)

Розв'язання. Позначимо через $M = NT \bigcap AC$ (рис. 3). Помітимо, що $\angle KBC = \angle KBA = \alpha$, оскільки BK -- бісектриса кута ABC, та $\angle KBC = \angle PTB$, оскільки PT паралельна BC, тому $PT = PB = PN$. Звідси випливає, що ΔBNT прямокутний з гіпотенузою BN. Оскільки прямокутним за побудовою також є ΔBNK, то $\angle KNT = \alpha$. Крім того, $\angle KAC = \angle KBC = \alpha$, як такі, що спираються на одну дугу. Тому чотирикутник $KANM$ – вписаний. Оскільки $\angle ANK = 90°$, то AK – діаметр описаного навколо $KANM$ кола, тому $\angle AMK = 90°$. Оскільки ΔAKC – рівнобедрений, то висота KM у ньому є також і медіаною. Звідси випливає, що $AM = MC$.

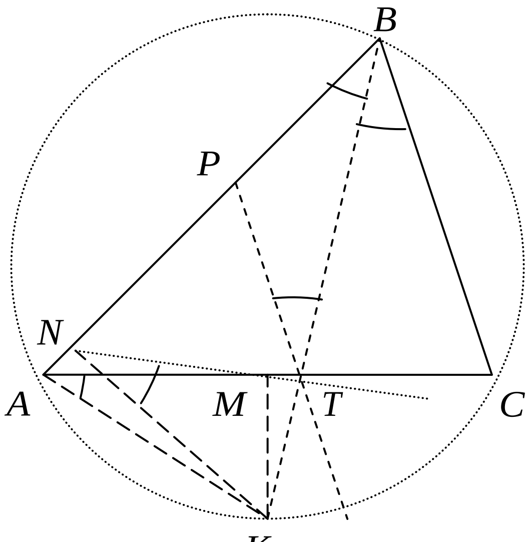

Рис. 3

9.3. Для додатних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, що задовольняють умову:

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \ldots x_n,$$

доведіть нерівність:

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1)\ldots(x_n - n + 1) \geq 1.$$

(Сердюк Назар)

Розв'язання. За нерівністю між середніми $\forall i = \overline{1, n}$ маємо:

$$x_1 x_2 \ldots x_n = x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1} \geq x_i^{n-1} + (n-1) x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n \Rightarrow$$

$$x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n (x_i - n + 1) \geq x_i^{n-1} \Rightarrow x_i - n + 1 \geq \frac{x_i^{n-1}}{x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n} \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i - n + 1) \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n-1}}{x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n} = 1,$$

що й треба було довести.

9.4. Для деякого непарного n квадрат $n \times n$ розбитий на n^2 клітинок і у деякій його клітині лежить n^2 фішок. За один крок дозволяється з клітини, у якій знаходиться не менше двох фішок, пересунути дві фішки у клітини, що симетричні відносно даної та мають з нею принаймні одну спільну точку. Таких типів ходів чотири – тип (1): фішки пересуваються паралельно вертикалі, тип (2): паралельно горизонталі, тип (3): паралельно діагоналі квадрата, що йде з лівого нижнього кута у правий верхній, тип (4): паралельно іншій діагоналі квадрата. Через декілька кроків виявилось, що в кожній клітині квадрату знаходиться рівно по одній фішці. Доведіть, що ходів типу (3) було зроблено таку ж кількість, що й ходів типу (4).

(Сердюк Назар)

Розв'язання. Перенумеруємо стовпчики зліва направо та рядки знизу догори числами $1; 2; \ldots; n$ (рис. 4). Для кожної клітини квадрата її вагою вважатимемо добуток номера рядка на номер стовпчика, у яких знаходиться ця клітинка. Вагою фішки у даний момент назвемо вагу тієї клітини, в якій вона зараз розташована. Вагою усього квадрату назвемо сумарну вагу усіх n^2 фішок.

n	$1\cdot n$	$\ldots$	$(k-1)\cdot n$	$k\cdot n$	$(k+1)\cdot n$	$\ldots$	$n\cdot n$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$m+1$	$1\cdot(m+1)$	$\ldots$	$(k-1)\cdot(m+1)$	$k\cdot(m+1)$	$(k+1)\cdot(m+1)$	$\ldots$	$n\cdot(m+1)$
m	$1\cdot m$	$\ldots$	$(k-1)\cdot m$	$k\cdot m$	$(k+1)\cdot m$	$\ldots$	$n\cdot m$
$m-1$	$1\cdot(m-1)$	$\ldots$	$(k-1)\cdot(m-1)$	$k\cdot(m-1)$	$(k+1)\cdot(m-1)$	$\ldots$	$n\cdot(m-1)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	$1\cdot 1$	$\ldots$	$(k-1)\cdot 1$	$k\cdot 1$	$(k+1)\cdot 1$	$\ldots$	$n\cdot 1$
	1	$\ldots$	$k-1$	k	$k+1$	$\ldots$	n

Рис. 4

Із задачі 8.4 випливає, що фішки можна розставити належним чином лише за умови, що вони усі розташовані в центральній клітині. Порахуємо вагу фішок у початковій позиції: якщо $n=2l-1$, то середня клітина має номер рядка та стовпчика l, а тому й вага усього квадрата – $l^2n^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Порахуємо вагу фішок у кінцевій позиції:

$$1\cdot(1+2+\ldots+n)+2\cdot(1+2+\ldots+n)+\ldots+n\cdot(1+2+\ldots+n)=$$
$$=(1+2+\ldots+n)\cdot(1+2+\ldots+n)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Таким чином вага квадрата не змінилася. Подивимось, як змінюється вага квадрата при різних типах ходів.

Тип (1): $2km-(k(m+1)+k(m-1))=0$ - вага не змінюється.

Тип (2): $2km-((k+1)m)+(k-1)m)=0$ - вага не змінюється.

Тип (3): $2km-((k+1)(m+1)+(k-1)(m-1))=-2$ - вага зменшується на 2.

Тип (4): $2km-((k-1)(m+1)+(k+1)(m-1))=+2$ - вага збільшується на 2.

Таким чином, при наявності s ходів типу (3), вони зменшать загальну вагу на $2s$, а тому, щоб вона стала знову, як на початку, повинні бути зробленими s ходів типу (4).

10 клас

10.1. Доведіть, що для усіх натуральних $n\geq 2$ наведене число є складеним:

$$\frac{n^{1003}+n^{1002}+n^{1001}+1}{n+1}.$$

(Голоднов Кирило)

Розв'язання. Оскільки

$$n^{1003}+n^{1002}+n^{1001}+1=n^{1001}(n^2+1)+n^{1002}+1=$$
$$=n^{1001}(n^2+1)+(n^2+1)(n^{1000}-n^{998}+n^{996}-\ldots-n^2+1)$$

то чисельник кратний n^2+1. Помітимо, що чисельник кратний і числу $n+1$, що випливає з такої рівності:

$$n^{1003}+n^{1002}+n^{1001}+1=n^{1002}(n+1)+n^{1001}+1=$$
$$=n^{1002}(n+1)+(n+1)(n^{1000}-n^{999}+n^{998}-\ldots-n+1).$$

Оскільки многочлени n^2+1 та $n+1$ є взаємно простими, то:

$$\frac{n^{1003}+n^{1002}+n^{1001}+1}{n+1}=\frac{(n+1)(n^2+1)P(n)}{n+1}=(n^2+1)P(n).$$

Легко зрозуміти, що $P(n)>1$. Твердження доведене.

10.2. Задача 9-2.

10.3. На дошці записано число 2016. Олеся та Андрій грають у таку гру: вони по черзі (починає Олеся) зменшують число на дошці на натуральне число, що не перевищує номера ходу (першим ходом Олеся повинна обов'язково зменшити число на 1, Андрій своїм ходом на 1 чи на 2, далі Олеся на 1, 2 чи 3 і т.д.) Виграє той, хто першим зможе записати на дошці число 0. Хто перемагає в при правильній грі обох супротивників?

(Піскун Олексій)

Відповідь: перемагає другий гравець.

Розв'язання. Визначимо позицію для цієї гри парою чисел (m, n), де mm – число, яке записано на дошці, а n – номер ходу. Будемо вважати позицію виграшною, якщо після ходу у неї гравець все ще матиме виграшну стратегію. Програшна – та, після ходу в яку виграшну стратегію матиме супротивник. Кожен гравець намагається досягти позиції $(0, n)$ після свого ходу (тобто записати 0), тому ці позиції виграшні. Покажемо, що карта виграшних-програшних позицій має такий вигляд, як на рис. 5.

m											
18	П	В	П	П	П	В	В	П	П	П	
17	П	В	П	П	П	В	П	П	П	П	
16	П	В	П	П	В	В	П	П	П	П	
15	В	В	П	П	В	П	П	П	П	П	
14	В	П	П	В	В	П	П	П	П	П	
13	В	П	П	В	П	П	П	П	П	П	
12	В	П	В	В	П	П	П	П	П	В	
11	П	П	В	П	П	П	П	П	В	В	
10	П	В	В	П	П	П	П	В	В	П	
9	П	В	П	П	П	П	В	В	П	П	
8	В	В	П	П	П	В	В	П	П	П	
7	В	П	П	П	В	В	П	П	П	П	
6	В	П	П	В	В	П	П	П	П	П	
5	П	П	В	В	П	П	П	П	П	П	
4	П	В	В	П	П	П	П	П	П	П	
3	В	В	П	П	П	П	П	П	П	П	
2	В	П	П	П	П	П	П	П	П	П	
1	П	П	П	П	П	П	П	П	П	П	
0	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n

Рис. 5

Зазначимо, що з клітинки (m, n) можна попасти у клітинки $(m-1, n+1)$, $(m-2, n+1)$, …, $(m-n, n+1)$, тобто можна переміщуватись у сусідній справа стовпчик і на одну, дві,…, n клітинок нижче.

Роздивившись значення $n=1$, $n=2$, $n=3$ можна зробити припущення, що проміжки виграшних та програшних позицій у n-му стовпчику мають такий вигляд:

<u>*виграшні*</u>: $[k^2+nk; k^2+nk+k]$, <u>*програшні*</u>: $[k^2+nk+k+1; k^2+nk+2k+n]$, $k\in \mathrm{Z}^+$.

Залишається це довести. Тобто, показати що з кожної визначеної як виграшної позиції можна потрапити лише в визначені як програшні, та що з кожної, яку визначено як програшну, існує хід у визначену як виграшну.

Нехай на n-му кроці на дошці записано число m та існує $k\in \mathrm{N}$:

$$k^2+nk\le m\le k^2+nk+k \text{ (тобто позиція виграшна).}$$

Тоді можна відняти число l, таке що $1\le l\le n$. Хід після цього стане $(n+1)$-м. Маємо:

$$m-l\ge m-n\ge k^2+nk-n=(k-1)^2+(n+1)(k-1)+(k-1)+1,$$

$$m-l\le m-1\ge k^2+nk+k-1=(k-1)^2+(n+1)(k-1)+2(k-1)+(n+1).$$

Так як це кінці одного програшного діапазону, то будь-який хід з виграшної позиції веде у програшний діапазон для $(k-1)$.

Нехай на n-му кроці на дошці записано число m та існує $k\in \mathrm{N}$:

$$k^2+nk+k+1\le m\le k^2+nk+2k+n \text{ (тобто позиція програшна).}$$

Роздивимось, що буде, якщо відняти 1 або n. Хід після цього стане $(n+1)$-м. Маємо:

$$k^2+(n+1)k+2k+(n+1)\ge k^2+nk+n-1\ge m-1\ge k^2+nk+k=k^2+(n+1)k,$$

тобто потрапимо у програшний діапазон для k або у виграшну позицію.

$$k^2+(n+1)k+k=k^2+nk+2k\ge m-n\ge k^2+nk+k+1-n\ge$$
$$\ge(k-1)^2+(n+1)(k-1)+(k-1)+1,$$

тобто потрапимо у програшний діапазон для $(k-1)$ або виграшну позицію.

Також ми можемо потрапити з числа m в усі числа від $(m-n)$ до $(m-1)$. Так як ці числа належать різним програшним діапазонам, між ними є виграшний діапазон.
Отже, вибрані діапазони дійсно є виграшними та програшними позиціями.
Подивимось тепер у який діапазон потрапляє позиція $(2016;1)$. Оскільки

$$[44^2+44=1980<2016<44^2+44+44=2024,$$

то ця позиція є виграшною, тому виграє другий гравець.

10.4. Чи існує функція $f:R\to R$ така, що для будь-яких дійсних чисел x,y справджується нерівність:

$$f(x-f(y))\le x-yf(x)?$$

(Воронович Ігор)

Відповідь: не існує.
***Розв'язання*.** Припустимо, що така функція існує. Підставимо в задану нерівність $y=0$:

$$f(x-f(0))\le x,$$

Тепер сюди підставимо $x=x+f(0)$:

$$f(x)\le x+f(0). \qquad \textbf{(1)}$$

У початкову нерівність підставимо $x=f(y)$, отримаємо, що:

$$f(0)\le f(y)-yf(f(y))\overset{(1)}{\le} y+f(0)-yf(f(y)) \text{ або}$$
$$yf(f(y))\le y.$$

З останньої нерівності при $y<0$ маємо, що:

$$1\le f(f(y))\overset{(1)}{\le} f(y)+f(0)\overset{(1)}{\le} y+2f(0).$$

Остання нерівність має виконуватись для довільного $y<0$, що, зрозуміло, неможливо.

11 клас

11.1. Задача 9-1.

11.2. Коло, що вписане в трикутник ABC, дотикається до його сторін AB, BC та CA у точках N,P,K відповідно. Відрізок BK вдруге перетинає вписане коло у точці L. Визначимо точки $T=AL\cap NK$, $Q=CL\cap KP$. Доведіть, що прямі BK,NQ та PT перетинаються в одній точці.

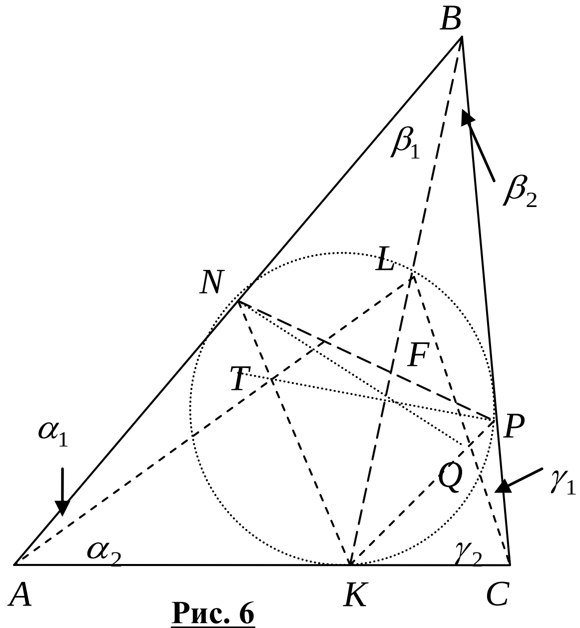

Рис. 6

(Нагель Ігор)

Розв'язання. Позначимо кути, як це показано на рис. 6. Для трикутників AKT та ATN застосуємо теорему синусів і одержимо:

$$\frac{NT}{TK}=\frac{AN\cdot\sin\alpha_1}{AK\cdot\sin\alpha_2}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}.$$

Аналогічно маємо:

$$\frac{NF}{FP}=\frac{NB\cdot\sin\beta_1}{PB\cdot\sin\beta_2}=\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2},\ \frac{PQ}{QK}=\frac{PC\cdot\sin\gamma_1}{KC\cdot\sin\gamma_2}=\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}.$$

Якщо усі ці вирази перемножити, то одержимо, що

$$\frac{NT}{TK}\cdot\frac{KQ}{QP}\cdot\frac{PF}{FN}=\frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_2\cdot\sin\gamma_2}{\sin\alpha_2\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\gamma_1}=1,$$

оскільки AL, BL та CL перетинаються в одні точці і для них справджується теорема Чеви у тригонометричній формі. Але тоді із теореми Чеви у стандартній формі випливає, що BK, NQ та PT перетинаються в одній точці, що й треба було довести.

11.3. Задача 10-4.

11.4. Назвемо квадрат $n\times n$, який розбито на прямокутники меншого розміру, *міцним*, якщо не існує прямої, яка розділяє квадрат на дві частини і при цьому не перетинає жоден маленький прямокутник у внутрішніх точках. Так на рис. 7 зображено міцний квадрат 4×4, а на рис. 8 – ні. Для довільного заданого натурального m, з'ясуйте, для яких натуральних n можна розбити квадрат $n\times n$ на прямокутники $m\times1$ та $1\times m$ так, щоб цей квадрат був міцним.

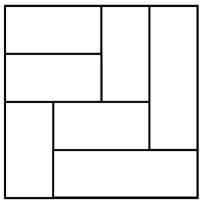

Рис. 7

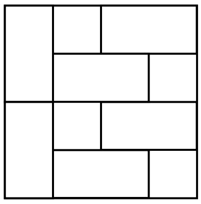

Рис. 8

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $m=1$ – не існує, $m=2$: $n=km,\ k\ge4$; $m\ge3$: $n=km,\ k\ge3$.

Розв'язання. Зрозуміло, що для існування деякого розбиття квадрату $n\times n$ на прямокутники $m\times1$ обов'язково повинна виконуватись умова $n^2\ \vdots\ m$, що випливає з міркувань площі. Доведемо більш сильне твердження.

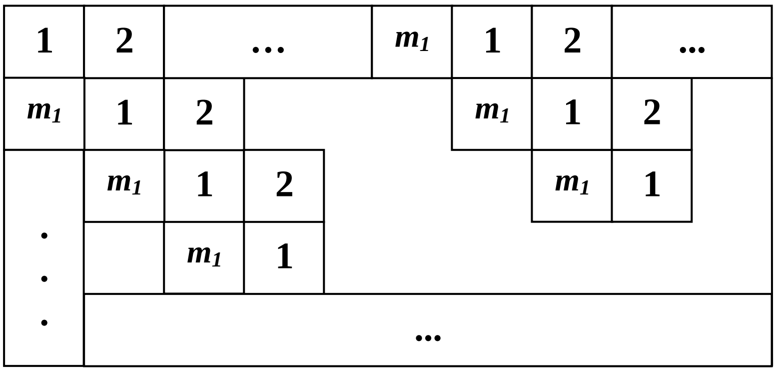

Рис. 9

<u>*Лема 1*</u>. Для існування будь-якого розбиття квадрату $n\times n$ на прямокутники $m\times1$ необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова $n\ \vdots\ m$.

Доведення. Достатність очевидна. Необхідність доведемо методом від супротивного. Припустимо, що відповідне розбиття існує, і при цьому $n\not\vdots\ m$. Позначимо через $d=(n,m)$. Зрозуміло, що $d>1$, оскільки $n^2\ \vdots\ m$. Тоді нехай $n=dn_1$ та $m=dm_1$, при цьому $(n_1, m_1)=1$. Крім того, оскільки $n_1^2d\ \vdots\ m_1$, то $d\ \vdots\ m_1$ та $n_1^2\not\vdots\ m_1$ (очевидно $m_1\ne1$, бо інакше $n\ \vdots\ m$).

Поділимо квадрат $n\times n$ на менші квадратики розміром $d\times d$ та пофарбуємо їх у m_1 кольорів діагональним методом (рис. 9).

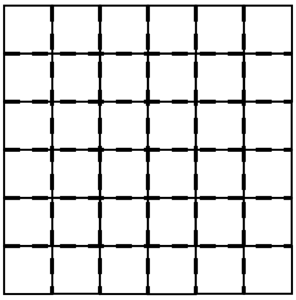

Рис. 10

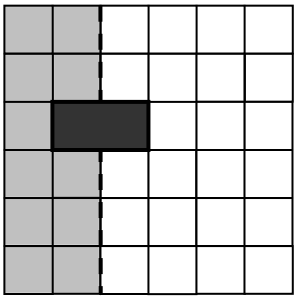

Рис. 11

При існуванні припущенного розбиття кожен прямокутник $m\times 1 = m_1 d\times 1$ покриває однакову кількість клітинок 1×1 кожного кольору. Але усього таких квадратиків рівно $\frac{n^2}{d^2}=n_1^2 \not\vdots\, m_1$. Таким чином квадратиків різного кольору не може бути однакова кількість, одержана суперечність звершує доведення леми.

Тепер перейдемо до розв'язання задачі. З леми випливає, що $n \,\vdots\, m$. Очевидно, що для $m=1$ таких розбиттів не існує. Далі розглянемо два випадки, $m=2$ та $m>2$.

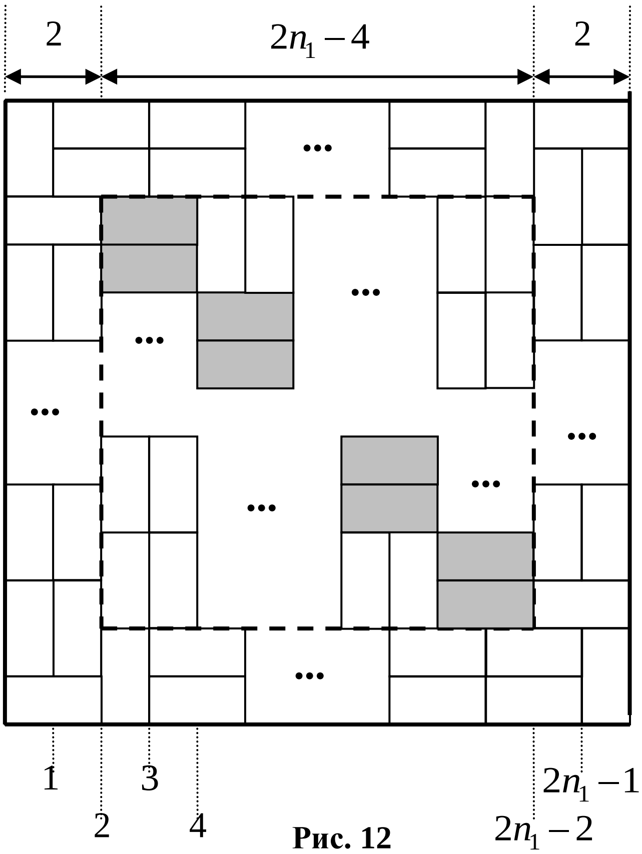

Рис. 12

Лема 2. Міцний квадрат $n\times n$, що розбитий на прямокутники 2×1 існує тоді і тільки тоді, коли $n=2n_1$ і $n_1\geq 4$.

Доведення. Те, що не можна побудувати міцний квадрат 2×2 та 4×4 майже очевидно і перевіряється простим перебором.

Покажемо, що не можна одержати міцний квадрат 6×6. Усього відрізків всередині такого квадрату рівно 10 (рис. 10). Якщо квадрат міцний, то кожен з таких відрізків повинен перетинати принаймні 1 прямокутник 2×1 посередині більших сторін. Якщо кожен з таких відрізків перетинає таким чином принаймні два прямокутники 2×1, то усього цих прямокутників повинно бути не менше 20, але як не важко підрахувати їх повинно бути усього $\frac{36}{2}=18$. Таким чином, там є відрізок, який перетинає рівно один прямокутник 2×1. Розглянемо цей відрізок (рис. 11). Він поділяє квадрат на дві частини – сіру та білу. Якщо цей відрізок більше не перетинає навпіл прямокутники 2×1, то уся сіра та біла частини повинні бути заповнені такими прямокутниками окремо. Але, як не важко побачити це неможливо, бо вони складаються з непарної кількості квадратів 1×1. Одержана суперечність завершує доведення.

Тепер покажемо, як можна розбити належним чином квадрат $2n_1\times 2n_1$ при $n_1\geq 4$, щоб він став міцним. Розглянемо заповнення як це показане на рис. 12. Знизу показане нумерація вертикальних відрізків зліва направо від 1 до $2n_1-1$, які проходять середині квадрату та можуть стати такими, що порушать міцність великого квадрату. Щоб квадрат став міцним кожний такий відрізок повинен перетинати принаймні 1 (а як показує доведення, що проведене вище, не менше 2) прямокутник 2×1 всередині. По зовнішньому кільцю ширини 2 розташування прямокутників 2×1 зроблене таким чином, що серед перенумерованих відрізків можуть порушити міцність квадрату лише ті, що мають непарні номери від 3 до $2n_1-3$. Всередині зовнішньої смуги ми маємо квадрат $(2n_1-4)\times(2n_1-4)$, яки розіб'ємо на квадрати 2×2. Цих квадратів буде більше одного оскільки $n_1\geq 4$. Подальше розбиття цього внутрішнього квадрату робимо таким чином – по одній діагоналі розділяємо їх горизонтально

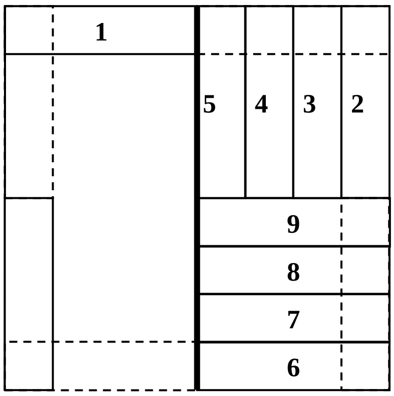

Рис. 13

(сірі на рис. 12), а усі інші – вертикально. Тоді сірі квадрати забезпечать міцність по вертикальних відрізках з непарними номерами від 3 до $2n_1-3$. А вертикальні – аналогічні горизонтальні відрізки. Лема доведена.

Лема 3. Міцний квадрат $n\times n$, що розбитий на прямокутники $m\times 1$, при $m\geq 3$, існує тоді і тільки тоді, коли $n=mn_1$ і $n_1\geq 3$.

Доведення. Спочатку покажемо, що не можна побудувати міцний квадрат $2m\times 2m$. Тут спрацюють і міркування при $m=2$. Методом від супротивного. Припустимо, що таке заповнення існує. Без обмеження загальності вважаємо, що у лівому верхньому куті прямокутник $m\times 1$ розташований горизонтально (позначений 1) (рис. 13). Але тоді правий верхній кут не може бути заповнений горизонтальним прямокутником, бо тоді утворюється горизонтальний відрізок, який порушує міцність квадрату (пунктир). Тому він повинен бути заповнений вертикальними прямокутниками, який має номер 2. Тоді обов'язково повинні бути покладені прямокутники 3–5, а далі, для стійкості послідовно повинні бути викладені прямокутники 6–9 і ми маємо вертикальний відрізок, який робить розкладку не міцною.

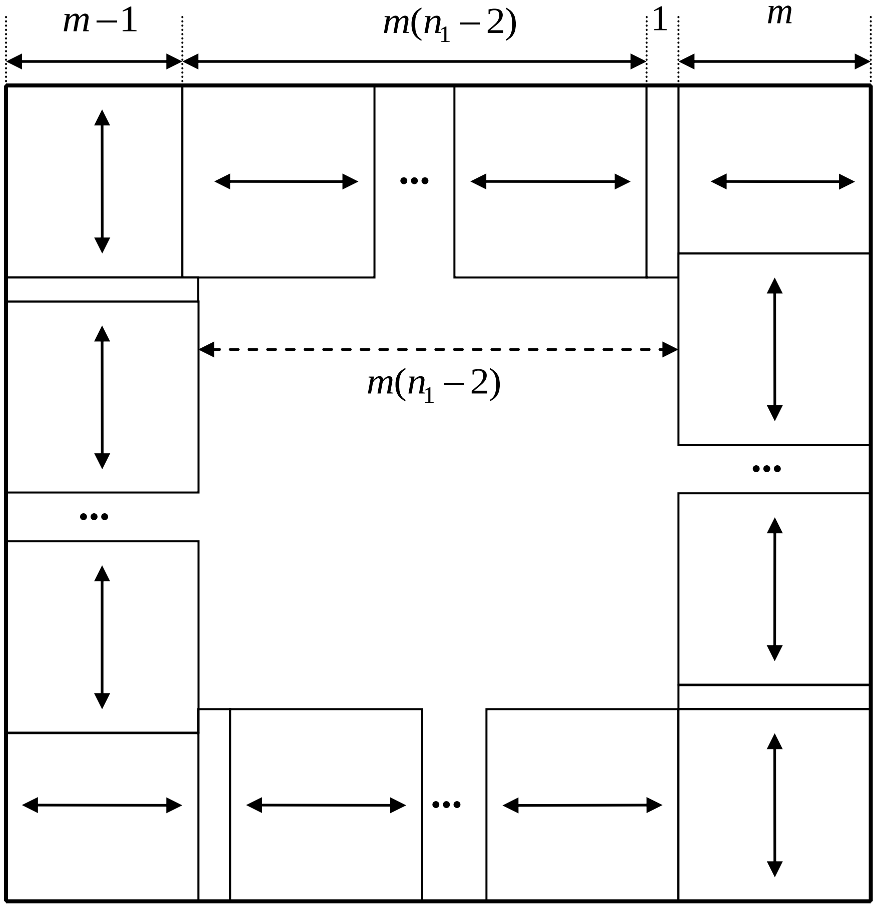

Рис. 14

Тепер покажемо, як зробити заповнення квадрату $mn_1\times mn_1$ при $n_1\geq 3$. Схема заповнення показана на рис. 14. Тут легко зрозуміти як заповнюється зовнішній шар – смуга шириною у m клітин. Оскільки заповнення є регулярним (циклічним), то не треба вздовж кожної сторони виписувати аналогічні розміри прямокутників. По заповненню цього шару вже не залишається жодного відрізка, який може порушити міцність квадрату $n\times n$. Тому середина великого квадрату без вже заповненої зовнішньої смуги – а це є квадрат зі стороною $m(n_1-2)$ заповнюється довільним чином.

Для більш кращого розуміння наведемо міцний квадрат 12×12 при його розбитті на прямокутники 4×1 (рис. 15).

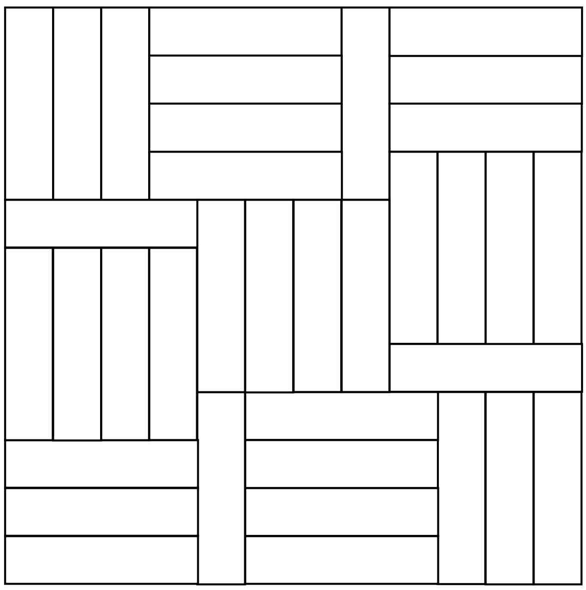

Рис. 15