Відбір команди України
на 54-ту Міжнародну математичну олімпіаду

Умови задач

Перший тур

1. Навколо рівнобедреного трикутника ABC з основою BC описали коло. Відрізок AD — діаметр кола, а точка P лежить на меншій дузі BD. Пряма DP перетинає промені AB й AC в точках M та N, а прямі BP й CP перетинають пряму AD у точках Q та R. Доведіть, що середина відрізка MN лежить на описаному колі трикутника PQR.

2. Учитель повідомив Петрику непарне натуральне число $l \leqslant 2013$ і дав хлопцю домашнє завдання. Петрик має розставити зірочки в комірках таблиці 2013×2013 так, щоб справджувалася умова: якщо в деякій клітині таблиці стоїть зірочка, то або в рядку, або в стовпчику, де міститься ця клітинка, має стояти не більше ніж l зірочок (включно з даною). При цьому в кожну комірку таблиці хлопець може поставити щонайбільше одну зірочку. Вчитель пообіцяв Петрику, що його оцінка буде пропорційною кількості зірочок, які хлопцю вдасться розставити. Яку найбільшу кількість зірочок зможе розставити в таблиці Петрик?

3. Функцію $\mathrm{rad}: \mathbb{N} \bigcup \{0\} \to \mathbb{N}$ визначено таким чином:

- $\mathrm{rad}(0) = \mathrm{rad}(1) = 1$;
- якщо $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — канонічний розклад натурального числа $n \geqslant 2$ на прості множники, то $\mathrm{rad}(n) = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$.

Знайдіть усі такі многочлени $f(x)$ із цілими невід'ємними коефіцієнтами, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ число $\mathrm{rad}(f(n^{\mathrm{rad}(n)}))$ націло ділиться на $\mathrm{rad}(f(n))$.

Другий тур

4. Назвімо *чарівною* множину A цілих чисел, що має таку властивість: якщо $x \in A$, $y \in A$ і k — довільне ціле число, то $x^2 + kxy + y^2 \in A$. Знайдіть усі пари $m \leqslant n$ цілих чисел, для яких єдиною чарівною множиною, що містить числа m і n водночас, є множина всіх цілих чисел.

5. Для додатних чисел x, y та z, які задовольняють умову $xyz = 1$, доведіть нерівність

$$\sqrt[3]{\frac{x+y}{2z}} + \sqrt[3]{\frac{y+z}{2x}} + \sqrt[3]{\frac{z+x}{2y}} \leqslant \frac{5(x+y+z)+9}{8}.$$

6. На площині позначили шість різних точок A, B, C, D, E, F. Жодні чотири з них не належать одному колу й жодні два відрізки із кінцями в цих точках не лежать на паралельних прямих. Нехай P, Q та R — точки перетину серединних перпендикулярів до пар відрізків (AD, BE), (BE, CF) та (CF, DA) відповідно, а P', Q' і R' — точки перетину серединних перпендикулярів до пар відрізків (AE, BD), (BF, CE) та (CA, DF) відповідно. Покажіть, що $P \neq P'$, $Q \neq Q'$, $R \neq R'$, і доведіть, що прямі PP', QQ' та RR' перетинаються в одній точці або є паралельними.

Третій тур

7. У соціальній мережі «Граф» зареєстровано 2013 користувачів. Деякі користувачі є друзями, причому дружба у «Графі» взаємна. Відомо, що серед користувачів мережі не знайдеться трьох, кожні два з яких дружили б між собою. Знайдіть найбільшу можливу кількість пар друзів у «Графі».

8. Відомо, що сторони AB та AC трикутника ABC мають різну довжину. Нехай точка O — центр описаного кола, а відрізок AD — бісектриса трикутника. Точка E симетрична точці D відносно середини сторони BC. Пряма, перпендикулярна до BC, що проходить через точку D, перетинає пряму AO в точці X, а пряма, перпендикулярна до BC, що проходить через E, перетинає пряму AD в точці Y. Доведіть, що B, C, X та Y лежать на одному колі.

9. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що для довільних дійсних чисел x та y задовольняють співвідношення

$$f^2(x+y)=f^2(x)+2f(xy)+f^2(y).$$

Четвертий тур

10. Нехай X та Y — деякі числові множини. Запровадимо позначення

$$X+Y=\{x+y\,|\,x\in X,\ y\in Y\}.$$

Інакше кажучи, $X+Y$ — множина, що складається з усіх чисел, які можна подати як суму числа з множини X і числа з множини Y.

Назвімо числову множину S *розби́вною*, якщо її можна розбити на три непорожні попарно неперетинні підмножини A, B та C (де $A\cup B\cup C=S$), для яких мно́жини $A+B$, $B+C$ і $C+A$ також є попарно неперетинними.

а) Чи є розбивною множина всіх цілих чисел?

б) Чи є розбивною множина всіх раціональних чисел?

11. Задано натуральне число a. Доведіть, що є нескінченна кількість простих чисел p таких, що при деякому натуральному n число $2^{2^n}+a$ ділиться на p.

12. На площині відмітили 4026 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. При цьому 2013 точок є вершинами опуклого многокутника, а інші 2013 точок лежать усередині цього многокутника. Дозволено пофарбувати кожну точку в один із двох кольорів. Розфарбування буде *гарним*, якщо деякі пари точок можна сполучити відрізками з дотриманням таких умов:

- Кожен відрізок сполучає точки однакового кольору.
- Жодні два проведені відрізки не перетинаються у своїх внутрішніх точках.
- Для довільної пари точок однакового кольору існує шлях по проведених відрізках від однієї точки до іншої.

Зверніть увагу, що сторони опуклого 2013-кутника не є автоматично проведеними відрізками, хоча деякі з них (або й усі) за потреби можна провести.

Доведіть, що загальна кількість гарних розфарбувань не залежить від конкретного розташування точок, і знайдіть цю кількість.

Відповіді та розв'язання

Перший тур

1 (Назар Сердюк). ***Розв'язання.*** Передусім зауважимо, що точка Q лежить на промені AD (і, звичайно, поза колом): якби Q лежала на промені DA, то мали б

$$\angle ADP + \angle DPB < 180^\circ \;\Rightarrow\; \angle ADP + (180^\circ - \angle BAD) < 180^\circ \;\Rightarrow\; \angle ADP < \angle BAD = \angle CAD.$$

Тоді точка перетину прямих DP й AC не лежала б на промені AC.

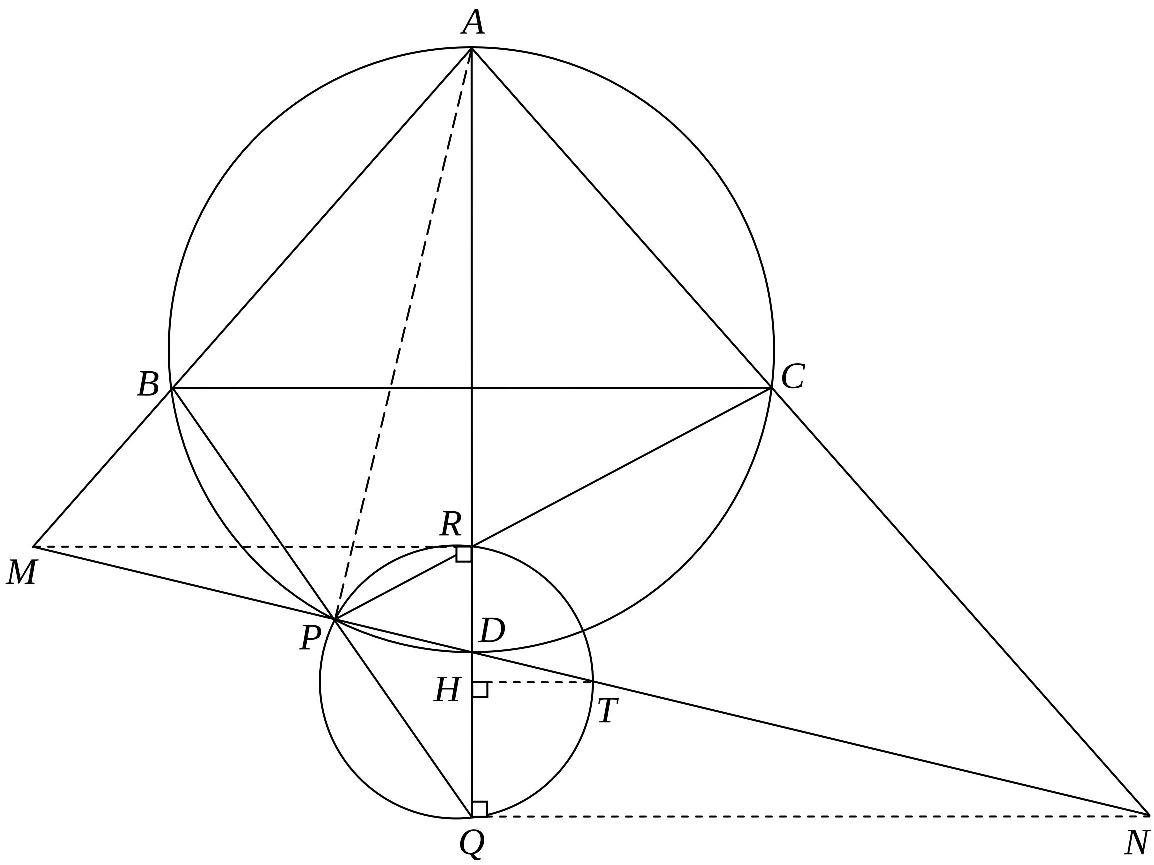

Рис. 1

Оскільки точка P лежить на описаному колі трикутника PQR, а точка D — усередині нього, то промінь PD перетинає це коло в деякій точці T. За побудовою T і є другою точкою перетину з колом прямої MN.

З рівності кутів

$$\angle NPQ = 180^\circ - \angle BPD = \angle BAD = \angle CAD = \angle NAQ$$

випливає, що $NAPQ$ — уписаний чотирикутник. Разом із тим $\angle APN = \angle APD = 90^\circ,$ бо AD — діаметр. Тому $\angle AQN = \angle APN = 90^\circ,$ тобто $NQ \perp AD.$ Вписаним є також і чотирикутник $MPRA$, бо

$$\angle MPR = 180^\circ - \angle CPD = 180^\circ - \angle CAD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle MAR.$$

Тому $\angle ARM = \angle APM = 180^\circ - \angle APD = 90^\circ,$ тобто $MR \perp AD.$ Опустимо перпендикуляр на AD також і з точки T. Основу перпендикуляра позначимо як H.

Точка A — середина дуги BC, яка не містить P. Тому за відомою властивістю бісектриси промінь PA — бісектриса кута BPC. Тоді, враховуючи, що $\angle APD = 90^\circ,$ пряма $PD = PT$ є зовнішньою бісектрисою кута BPC, тобто бісектрисою кута QPR. Звідси T — середина дуги QR, що не містить точки P. А отже, H — середина відрізка QR. Оскільки, очевидно, прямі AD і $MN = DP$ не є перпендикулярними, це означає, що T — середина відрізка MN.

2 (Богдан Рубльов). ***Відповідь:*** $2l(2013-l),$ якщо $l \leqslant 671,$ або $\left(\dfrac{2013+l}{2}\right)^2,$ якщо $l \geqslant 671.$

Розв'язання. Нехай у таблиці рівно m рядків і рівно n стовпців, у кожному з яких кількість зірочок не більша за l. Оскільки перестановка рядків таблиці не впливає на кількість зірочок у стовпцях і не призводить до порушення властивостей таблиці, відповідні m рядків можна зробити першими рядками таблиці; аналогічно відповідні n стовпців можна зробити першими стовпцями. Після такої перестановки рядків і стовпців таблиця розбивається на чотири області, як показано на рис. 2. При цьому одна або кілька областей можуть мати нульову ширину чи висоту.

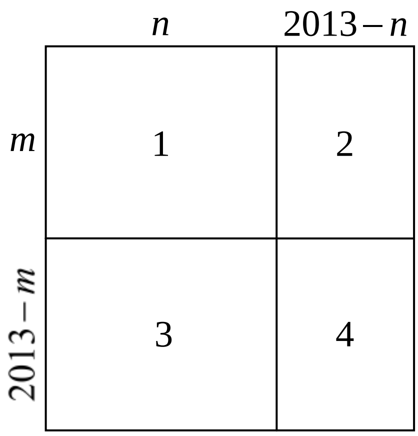

Рис. 2

У четвертій області не може стояти жодної зірочки, адже якщо деяка клітина належить цій області, то і в її рядку, і в її стовпці понад l зірочок. Якщо деяка клітинка другої області порожня і кількість зірочок у другій області, що стоять в одному рядку з цією клітинкою, менша за l, то таку клітинку можна заповнити:

- Якщо в тому ж рядку в області 1 немає зірочок, у вибрану клітинку можна поставити нову зірочку, не порушивши властивостей таблиці.
- Якщо в тому ж рядку в області 1 є хоча б одна зірочка, то, не порушивши властивостей таблиці, її можна переставити у вибрану клітинку.

Таким чином, можемо вважати, що в кожному рядку в області 2 стоїть рівно по $\min\{2013-n, l\}$ зірочок, а всього в області 2, відповідно, $m \cdot \min\{2013-n, l\}$ зірочок. Разом із тим у кожному з перших n стовпців кількість зірочок не перевищує l, тому загальна кількість зірочок у таблиці не більша за $s_1 = m \cdot \min\{2013-n, l\} + nl.$ З аналогічних міркувань вона не перевищує також і числа $s_2 = n \cdot \min\{2013-m, l\} + ml.$ Не втрачаючи загальності, припустимо, що $m \leqslant n.$ У такому випадку $2013-n \leqslant 2013-m.$

Випадок 1: якщо $l \leqslant 2013-n \leqslant 2013-m,$ тобто $m \leqslant n \leqslant 2013-l,$ то

$$s_2 = n \cdot \min\{2013-m, l\} + ml = nl + ml = l(n+m) \leqslant 2l(2013-l).$$

Випадок 2: якщо $2013-n \leqslant l \leqslant 2013-m,$ тобто $m \leqslant 2013-l \leqslant n,$ то

$$s_1 = m \cdot \min\{2013-n, l\} + nl = m(2013-n) + nl \leqslant$$
$$\leqslant (2013-l)(2013-n) + nl = n(2l-2013) + 2013(2013-l).$$

Якщо $2l-2013 > 0,$ то вираз набуває найбільшого значення, коли n найбільше, тобто за умови $n = 2013.$ Якщо $2l-2013 < 0,$ то вираз набуває найбільшого значення, коли n найменше, тобто при $n = 2013-l.$ Таким чином,

$$s_1 \leqslant \begin{cases} 2l(2013-l), & l < 1007; \\ 2013l, & l \geqslant 1007. \end{cases}$$

Випадок 3: якщо $2013-n \leqslant 2013-m \leqslant l,$ тобто $2013-l \leqslant m \leqslant n,$ то

$$s_1 = m \cdot \min\{2013-n, l\} + nl = m(2013-n) + nl \leqslant n(2013-n) + nl = n(2013+l-n).$$

Оскільки сума множників $n + (2013+l-n) = 2013+l$ стала, добуток є тим більшим, чим ближчі значення мають множники. Якщо $l \geqslant \frac{2013}{3} = 671,$ то $\frac{2013+l}{2} \geqslant 2013-l$ і найбільше значення виразу досягається при $n = 2013+l-n = \frac{2013+l}{2}$: воно дорівнює $\left(\frac{2013+l}{2}\right)^2.$ Якщо $l \leqslant 671,$ то $\frac{2013+l}{2} \leqslant 2013-l$ і найбільше значення виразу досягається при $n = 2013-l,$ воно дорівнює $2l(2013-l).$

Таким чином, у кожному з трьох випадків за умови $l \leqslant 671$ кількість зірочок у таблиці не перевищує $2l(2013-l).$ Притому рівно стільки зірочок можна отримати, поклавши $m = n = 2013-l$ і заповнивши зірочками всі клітини областей 2 і 3.

Якщо $l \geqslant 671,$ то кількість зірочок не перевищує найбільшого з усіх можливих варіантів — числá

$$\max\left\{2l(2013-l), 2013l, \left(\frac{2013+l}{2}\right)^2\right\}.$$

Оскільки $2l + (2013-l) = 2013+l = 2 \cdot \frac{2013+l}{2},$ то найбільшим із цих трьох чисел є добуток із рівними множниками — величина $\left(\frac{2013+l}{2}\right)^2$. Рівно стільки зірочок можна отримати, поклавши $m=n=\frac{2013+l}{2}$ і заповнивши зірочками всі клітинки областей 2 і 3, а також деякі клітинки області 1 так, щоб у кожному її рядку і стовпці було рівно по $l-(2013-m)=\frac{3l-2013}{2}\geqslant 0$ зірочок. Це можна зробити, приміром, так: записати зірочки в ті й тільки ті клітинки першої області, що стоять на перетині *i*-го рядка та *j*-го стовпця, різниця номерів яких $j-i$ у разі ділення на довжину сторони області $m=n$ дає остачу, меншу за $\frac{3l-2013}{2}$. Отже, матимемо по $\frac{2013+l}{2}\cdot\left(2013-\frac{2013+l}{2}\right)$ зірочок у другій і третій областях, а також $\frac{2013+l}{2}\cdot\frac{3l-2013}{2}$ зірочок у першій області. Разом — $\frac{2013+l}{2}\cdot\left(2\left(2013-\frac{2013+l}{2}\right)+\frac{3l-2013}{2}\right)=\left(\frac{2013+l}{2}\right)^2$ зірочок.

3. ***<u>Відповідь</u>:*** $f(x)=ax^m,\ a\geqslant 0,\ m\geqslant 0.$

<u>Розв'язання</u>. Спершу переконаймося, що многочлен вигляду $f(x)=ax^m$ справді задовольняє умову задачі. Якщо $a=0$ або $m=0$, то многочлен є сталою величиною, тому $f(n^{\mathrm{rad}(n)})=f(n)$, звідки $\mathrm{rad}(f(n^{\mathrm{rad}(n)}))=\mathrm{rad}(f(n))$ для довільного *n*. А якщо $a>0$ та $m>0$, число $an^{m\,\mathrm{rad}(n)}=f(n^{\mathrm{rad}(n)})$ має ті самі прості дільники, що й $an^m=f(n)$, тож і в цьому випадку $\mathrm{rad}(f(n^{\mathrm{rad}(n)}))=\mathrm{rad}(f(n))$.

Нехай тепер ненульовий многочлен $f(x)$ задовольняє умову задачі. Умова означає, що якщо для деякого $n\in\mathbb{N}$ число $f(n)$ ділиться на просте число *p*, то на *p* ділиться також і $f(n^{\mathrm{rad}(n)})$:

$$f(n)\,\vdots\,p\ \Rightarrow\ f(n^{\mathrm{rad}(n)})\,\vdots\,p.$$

Оскільки $\mathrm{rad}(n^{\mathrm{rad}(n)})=\mathrm{rad}(n)$, то, підставивши замість *n* величину $n^{\mathrm{rad}(n)}$, дістанемо

$$f(n^{\mathrm{rad}(n)})\,\vdots\,p\ \Rightarrow\ f(n^{\mathrm{rad}^2(n)})\,\vdots\,p.$$

Аналогічно $f(n^{\mathrm{rad}^3(n)})$ і т. д. Отже, для будь-якого $l\in\mathbb{N}$ маємо $f(n)\,\vdots\,p\ \Rightarrow\ f(n^{\mathrm{rad}^l(n)})\,\vdots\,p.$

Розкладімо наш многочлен як $f(x)=x^m g(x)$, де $m\geqslant 0$, а $g(0)\neq 0$ (зауважимо, що $g(0)$ — це вільний член многочлена $g(x)$). Спершу ми доведемо, що множина всіх простих дільників чисел вигляду $g(-t)$, $t\in\mathbb{N}$, є скінченною. Як ми покажемо далі, звідси випливатиме, що $g(x)$ — стала величина. Це й означатиме $f(x)=ax^m$.

Нехай натуральне число *t* зафіксовано і *p* — простий дільник числа $g(-t)$. Тоді

$$f((p-1)t)=((p-1)t)^m g((p-1)t)\equiv((p-1)t)^m g(-t)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p),$$

тобто $f((p-1)t)\,\vdots\,p$. Для досить великих *l* обов'язково виконується $\mathrm{rad}^l((p-1)t)\,\vdots\,p-1$.

- Якщо число $(p-1)t$ не ділиться на *p* і $\mathrm{rad}^l((p-1)t)\,\vdots\,p-1$, то за малою теоремою Ферма $((p-1)t)^{\mathrm{rad}^l((p-1)t)}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$. Тому
$$f(1)\equiv f(((p-1)t)^{\mathrm{rad}^l((p-1)t)})\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p),$$
тобто $f(1)\,\vdots\,p$.
- Якщо добуток $(p-1)t$ ділиться на *p*, то $t\,\vdots\,p$. Звідси
$$g(0)\equiv g(-t)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p),$$
тобто $g(0)\,\vdots\,p$.

Оскільки ненульовий многочлен $f(x)$ має невід'ємні коефіцієнти, то $f(1)\neq 0$. Таким чином, будь-який простий дільник числа вигляду $g(-t)$ є дільником принаймні одного з двох ненульових чисел $f(1)$ і $g(0)$. Отже, таких простих дільників є лише скінченна кількість.

Нарешті, покажемо, що $g(x)$ є сталою величиною. Цей многочлен, як і $f(x)$, має невід'ємні коефіцієнти. Нехай $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$, $k\geqslant 0$, — множина всіх простих дільників чисел вигляду $g(-t)$,

$t\in\mathbb{N}$. Підставимо $t=t_s=s\cdot(p_1p_2\cdot\ldots\cdot p_k)\cdot g(0)>0,\ s\in\mathbb{N}$:

$$g(-t_s)\,\vdots\, g(0),\ \frac{g(-t_s)}{g(0)}-1=\frac{g(-t_s)-g(0)}{g(0)}\,\vdots\, p_i,\ 1\leqslant i\leqslant k\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{g(-t_s)}{g(0)}\not\vdots\ p_i,\ 1\leqslant i\leqslant k\ \Rightarrow\ \frac{g(-t_s)}{g(0)}=\pm1\ \Rightarrow\ g(-t_s)=\pm g(0).$$

Але s може бути довільним натуральним числом, тому хоча б одне зі значень $g(0)$ або $-g(0)$ многочлен $g(x)$ набуває при нескінченній кількості різних значень аргументу. Це можливо, лише коли $g(x)$ — константа.

Другий тур

4. *Відповідь:* $(m,n)\neq(0,0)$, НСД$(m,n)=1$, $m\leqslant n$.

Розв'язання. Для довільного натурального числа d множина A_d всіх цілих чисел, що діляться на d, буде чарівною, адже

$$x\,\vdots\, d,\ \ y\,\vdots\, d,\ k\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ x^2+kxy+y^2\,\vdots\, d.$$

Якщо числа m та n водночас діляться на деяке натуральне число d, більше за 1, то обидва належатимуть множині $A_d\neq\mathbb{Z}$, а тому не задовольнятимуть умову задачі.

Покажемо тепер, що довільні два взаємно прості числа m та n будуть задовольняти умову. Зауважимо такі дві властивості чарівної множини A:

1) Якщо $x\in A$ і $c\in\mathbb{Z}$, то $cx^2\in A$. Це можна показати, підставивши в умову задачі $y=x$ і $k=c-2$.
2) Якщо $x\in A$ та $y\in A$, то й $(x+y)^2\in A$: достатньо підставити $k=2$.

Якщо числа m та n взаємно прості, то взаємно простими є й числа m^2 та n^2. Тоді за лемою Безу існують такі цілі a і b, для яких $am^2+bn^2=1$. Якщо $m\in A$ і $n\in A$, то з першої властивості чарівних множин $am^2\in A$ і $bn^2\in A$. А тоді з другої властивості $1=(am^2+bn^2)^2\in A$. Тепер, підставивши $x=1$ у першу властивість, дістанемо $A=\mathbb{Z}$.

5 (Данило Радченко). ***Розв'язання.*** Запровадимо нові змінні

$$a=\sqrt[3]{x},\ \ b=\sqrt[3]{y},\ \ c=\sqrt[3]{z}\ \Leftrightarrow\ x=a^3,\ \ y=b^3,\ \ z=c^3.$$

Тоді умова $xyz=1$ набуде вигляду $a^3b^3c^3=1\ \Leftrightarrow\ abc=1$, а нерівність, яку ми доводимо, перетвориться на

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2c^3}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2a^3}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+a^3}{2b^3}}\leqslant\frac{5(a^3+b^3+c^3)+9}{8}.$$

Використаймо нерівність Шура

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

Застосовуючи це співвідношення,

$$\frac{5(a^3+b^3+c^3)+9}{8}=\frac{2(a^3+b^3+c^3)+(3(a^3+b^3+c^3)+9abc)}{8}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2(a^3+b^3+c^3)+3(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a))}{8}=\frac{(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3}{8}.$$

Таким чином, нам достатньо довести нерівність вигляду

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2c^3}}\leqslant\frac{(a+b)^3}{8}\ \Leftrightarrow\ \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2c^3}}\leqslant\frac{(a+b)^3}{8abc}\ \Leftrightarrow\ \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\leqslant\frac{(a+b)^3}{8ab}$$

для довільних додатних чисел a і b. Домноживши обидві частини на $8ab$ і піднісши до куба, дістанемо рівносильну нерівність

$$256a^3b^3(a^3+b^3)\leqslant(a+b)^9\ \Leftrightarrow\ (a+b)^9-256a^3b^3(a^3+b^3)\geqslant0.$$

Але, поділивши кілька разів вираз $(a+b)^9-256a^3b^3(a^3+b^3)$ на $a-b$, матимемо

$$(a+b)^9-256a^3b^3(a^3+b^3)=(a-b)^4(a^5+13a^4b+82a^3b^2+82a^2b^3+13ab^4+b^5)\geqslant0.$$

Це й завершує розв'язання.

6 (Назар Сердюк). ***Розв'язання.*** Серединний перпендикуляр до відрізка — геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців. Тому точка P рівновіддалена від пар точок (A, D) та (B, E), а P' рівновіддалена від пар точок (A, E) та (B, D). Якби P та P' збігалися, то вони були б рівновіддалені від усіх чотирьох точок A, B, D, E. Але тоді ці чотири точки лежали б на одному колі з центром у $P = P'$, що суперечить умові задачі. Отже, $P \neq P'$ і аналогічно $Q \neq Q'$ та $R \neq R'$.
Далі використаємо допоміжне твердження.

Лема. Якщо A, B, C, D — чотири різні точки і прямі AC та BD не є паралельними, то геометричне місце точок X, для яких $XA^2 + XB^2 = XC^2 + XD^2$, — деяка пряма.
Доведення. Нехай точка M є серединою відрізка AB, а точка N — середина CD. За формулою довжини медіани трикутника, застосованою до трикутників XAB та XCD,

$$XM^2 = \frac{2XA^2 + 2XB^2 - AB^2}{4}, \quad XN^2 = \frac{2XC^2 + 2XD^2 - CD^2}{4}$$

(формула працює також і для вироджених трикутників). Тому

$$XA^2 + XB^2 = XC^2 + XD^2 \iff XM^2 - XN^2 = \frac{CD^2 - AB^2}{4}.$$

Якби точки M та N збігалися, то чотирикутник $ACBD$ був би (можливо, виродженим) паралелограмом. Але в такому випадку мали б $AC \parallel BD$, що суперечить умові леми. Отже, $M \neq N$. Проведемо тоді пряму MN та через P_X позначимо основу перпендикуляра, опущеного на цю пряму з точки X. Оскільки

$$XM^2 = XP_X^2 + P_X M^2 \text{ і } XN^2 = XP_X^2 + P_X N^2,$$

то умова стає рівносильною співвідношенню $P_X M^2 - P_X N^2 = \dfrac{CD^2 - AB^2}{4}$. Довільним чином запровадимо на прямій MN координати, що зберігають довжину одиничного відрізка. Позначивши координати точок M, N та P_X через m, n та x відповідно, зможемо переписати співвідношення як

$$\frac{CD^2 - AB^2}{4} = (x-m)^2 - (x-n)^2 = x(2n-2m) + (m^2 - n^2) \iff x = \frac{(CD^2 - AB^2)/4 + n^2 - m^2}{2n - 2m}.$$

Таким чином, умову леми задовольняють ті й лише ті точки X, що лежать на перпендикулярі до прямої MN, який проходить через точку $x = \dfrac{(CD^2 - AB^2)/4 + n^2 - m^2}{2n - 2m}$ на цій прямій. Лему доведено.

Повернімося до задачі. Обидві точки P та P' належать до геометричного місця точок X, для яких $XA^2 + XB^2 = XD^2 + XE^2$. Звідси, оскільки за умовою задачі $AD \nparallel BE$, ГМТ із такою властивістю є вся пряма PP'. Аналогічно пряма QQ' — ГМТ із властивістю $XB^2 + XC^2 = XE^2 + XF^2$, а пряма RR' — ГМТ із властивістю $XC^2 + XD^2 = XF^2 + XA^2$.
Якщо жодні дві з трьох прямих PP', QQ' та RR' не мають спільних точок, то вони паралельні. У випадку, якщо хоча б одна пара прямих перетинається, без утрати загальності можемо вважати, що це прямі PP' і QQ'. З огляду на сказане вище, точка їхнього перетину X має властивості

$$XA^2 + XB^2 = XD^2 + XE^2, \quad XB^2 + XC^2 = XE^2 + XF^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow XA^2 - XC^2 = XD^2 - XF^2 \Rightarrow XC^2 + XD^2 = XF^2 + XA^2.$$

Отже, X лежить також і на прямій RR', тобто всі три прямі проходять через одну точку.

Третій тур

7. ***Відповідь:*** $1006 \cdot 1007 = 1\,013\,042$.

Розв'язання. Нехай $\deg(k)$ позначає степінь вершини k графа друзів, тобто кількість друзів користувача k. Позначимо множину вершин графа як V, а множину ребер — як E. Нехай також $v = 2013$ та e — кількості вершин та ребер графа відповідно.

З умови задачі випливає, що якщо вершини x та y графа сполучено ребром, то жодна інша вершина не сполучена водночас і з x, і з y. Звідси $\deg(x)+\deg(y)\leqslant 1+1+(v-2)=v.$ Просумуймо такі оцінки по всіх парах сполучених ребер:

$$\sum_{(x,\,y)\in E}(\deg(x)+\deg(y))\leqslant\sum_{(x,\,y)\in E}v=ev.$$

Оскільки для будь-якої вершини x у множині E є рівно $\deg(x)$ ребер $(x,\,y),$ то

$$\sum_{(x,\,y)\in E}(\deg(x)+\deg(y))=\sum_{x\in V}\deg^2(x).$$

Тому, використовуючи нерівність між середнім арифметичним і середнім квадратичним,

$$ev\geqslant\sum_{x\in V}\deg^2(x)\geqslant\frac{\left(\sum_{x\in V}\deg(x)\right)^2}{v}=\frac{(2e)^2}{v}.$$

Звідси $e\leqslant\dfrac{v^2}{4}=\dfrac{2013^2}{4}.$ А враховуючи, що число e ціле,

$$e\leqslant\frac{2013^2-1}{4}=\frac{(2013-1)(2013+1)}{4}=1006\cdot1007.$$

Разом із тим побудувати приклад графа, де кількість ребер дорівнюватиме $1006\cdot1007,$ нескладно: умову задовольнятиме дводольний граф із долями завбільшки 1006 і 1007.

8. ***<u>Розв'язання</u>*.** Без утрати загальності можемо вважати, що $AB>AC.$ Нехай M — середина сторони BC, а P — друга точка перетину прямої, що містить бісектрису AD, з описаним колом трикутника ABC. Як відомо, P — середина дуги BC, тому PM — серединний перпендикуляр до відрізка BC. Отже, точки O, M і P лежать на одній прямій, перпендикулярній до BC. Позначимо через Y' точку, симетричну точці Y відносно цієї прямої; Y' належатиме прямій DX. Точка O може лежати як з одного, так і з іншого боку від прямої BC, але X та Y обов'язково лежать по різні боки від цієї прямої: точка X із того ж боку, що A, а точка Y (як і Y') — із протилежного. Оскільки з міркувань симетрії $\angle BY'C=\angle BYC,$ то для розв'язання задачі досить показати, що на одному колі лежать точки B, C, X та Y'.

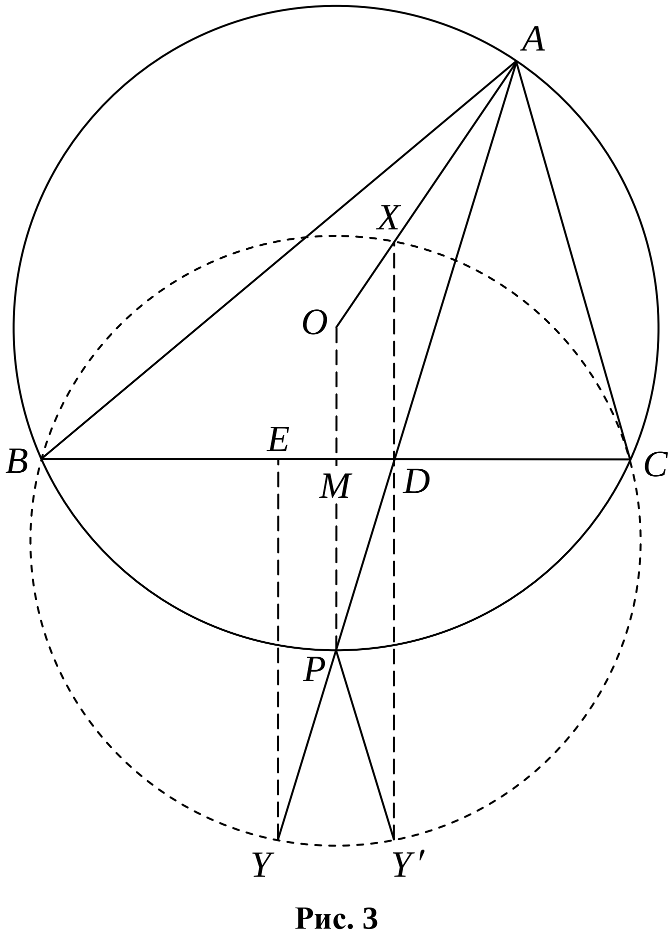

Рис. 3

Відрізки OA та OP рівні (як радіуси кола), звідки $\angle OAP = \angle OPA$. Крім того, $EY \parallel OP$, а $\angle EYP = \angle DY'P$ як симетричні відносно прямої OP. Тож можемо записати

$$\angle XAP = \angle OAP = \angle OPA = \angle EYP = \angle DY'P = \angle XY'P.$$

Ураховуючи, що точки A та Y' розташовані з одного боку від прямої PX, чотирикутник $AXPY'$ вписаний. Тепер, застосувавши теорему про степінь точки до точки D відносно кіл, описаних навколо $AXPY'$ і $ABPC$, дістанемо

$$DX \cdot DY' = DA \cdot DP = DB \cdot DC.$$

Отже, чотирикутник $BXCY'$ також уписаний, що й завершує розв'язання.

9 (Олексій Клурман). ***<u>Відповідь:</u>*** $f \equiv 0$, $f \equiv -2$, $f(x) = x$ або $f(x) = x - 2$.

<u>Розв'язання.</u> Для зручності ще раз перепишемо рівність з умови задачі:

$$f^2(x+y) = f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y). \qquad (1)$$

Підставимо сюди $y = -x$, матимемо

$$f^2(0) = f^2(x) + 2f(-x^2) + f^2(-x). \qquad (2)$$

Підставивши в (1) $x \leftarrow x+y$, $y \leftarrow -x$, дістанемо

$$f^2(y) = f^2(x+y) + 2f(-x^2 - xy) + f^2(-x). \qquad (3)$$

Додамо (1), (2) і (3), переставивши у (2) ліву і праву частини місцями:

$$\cancel{f^2(x+y)} + \left(\cancel{f^2(x)} + 2f(-x^2) + \cancel{f^2(-x)}\right) + \cancel{f^2(y)} =$$

$$= \left(\cancel{f^2(x)} + 2f(xy) + \cancel{f^2(y)}\right) + f^2(0) + \left(\cancel{f^2(x+y)} + 2f(-x^2 - xy) + \cancel{f^2(-x)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x^2) = f(xy) + f(-x^2 - xy) + \frac{f^2(0)}{2}.$$

Запровадивши функцію $g(x) = f(x) + \dfrac{f^2(0)}{2}$, ми зведемо останню рівність до вигляду

$$g(-x^2) = g(xy) + g(-x^2 - xy). \qquad (4)$$

Зауважимо, що $-x^2 = xy + (-x^2 - xy)$. Для будь-якої пари від'ємних чисел a та b система рівнянь $xy = a$, $-x^2 - xy = b$ має розв'язок у дійсних числах (наприклад, $x = \sqrt{-a-b}$, $y = \dfrac{a}{\sqrt{-a-b}}$). А отже, для всіх від'ємних значень аргументів a та b виконується рівність $g(a+b) = g(a) + g(b)$. Крім того, з (2) випливає

$$f(-x^2) = \frac{f^2(0) - f^2(x) - f^2(-x)}{2} \leqslant \frac{f^2(0)}{2} \Rightarrow g(-x^2) = f(-x^2) + \frac{f^2(0)}{2} \leqslant f^2(0).$$

Таким чином, для недодатних значень аргументів функція g обмежена зверху.

<u>Лема</u>. Якщо функція $g : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ для всіх пар від'ємних чисел x та y задовольняє співвідношення $g(x+y) = g(x) + g(y)$ і обмежена зверху певною сталою величиною, то вона має вигляд $g(x) = cx$ для деякої невід'ємної константи c.

<u>Доведення</u>. Методом математичної індукції просто показати, що для довільного натурального n і будь-якого від'ємного числа x виконується $g(nx) = ng(x)$. Підставивши сюди $x \leftarrow \dfrac{x}{n}$, дістанемо $g(x) = ng\left(\dfrac{x}{n}\right) \Rightarrow g\left(\dfrac{x}{n}\right) = \dfrac{g(x)}{n}$. Тоді для довільного додатного раціонального числа $k = \dfrac{m}{n}$ маємо

$$g(kx) = g\left(\frac{m}{n} \cdot x\right) = mg\left(\frac{1}{n} \cdot x\right) = \frac{m}{n} \cdot g(x) = kg(x).$$

Якби для деякого значення аргументу $x = x_0$ функція $g(x)$ набувала додатного значення, то для достатньо великого раціонального числа k значення $g(kx_0) = kg(x_0)$ перевищило б число, яким обмежена функція. Отже, $g(x) \leqslant 0$, $x < 0$. Тоді для довільної пари чисел $x < y < 0$

$$g(x) = g((x-y)+y) = g(x-y) + g(y) \leqslant g(y).$$

Таким чином, функція є неспадною.

Нехай $c=-g(-1)\geqslant 0$ — фіксоване число. Згідно з доведеним вище, для довільного від'ємного раціонального числа k маємо $g(k)=g((-k)\cdot(-1))=(-k)g(-1)=ck.$ Для довільного від'ємного x і $\varepsilon>0$ знайдуться раціональні числа k_1 і $k_2,$ такі що

$$x-\varepsilon<k_1\leqslant x\leqslant k_2<\min\{x+\varepsilon,0\}.$$

Оскільки g неспадна, то $g(k_1)\leqslant g(x)\leqslant g(k_2).$ З іншого боку, $g(k_1)=ck_1\geqslant c(x-\varepsilon)=cx-\varepsilon c$ і аналогічно $g(k_2)=ck_2\leqslant c(x+\varepsilon)=cx+\varepsilon c.$ Тоді $cx-\varepsilon c\leqslant g(x)\leqslant cx+\varepsilon c$ для як завгодно малих додатних $\varepsilon.$ Звідси, очевидно, $g(x)=cx.$ Лему доведено.

З леми випливає, що $g(x)=cx,\ x<0,$ для деякої сталої c. Тепер підставимо у (4) $y=-1-x$:

$$g(-x^2)=g(-x-x^2)+g(-x^2+x+x^2)\ \Rightarrow\ g(x)=g(-x^2)-g(-x-x^2).$$

Для довільного додатного x чи́сла $-x^2$ і $-x-x^2$ від'ємні, а тому

$$g(x)=c(-x^2)-c(-x-x^2)=cx.$$

Нарешті, при $x=0$ маємо $-x^2=-x-x^2=0,$ а рівняння набуває вигляду

$$g(0)=g(0)-g(0)=0=c\cdot 0.$$

Отже, $g(x)=cx$ для всіх x. Тоді $f(x)=g(x)-\dfrac{f^2(0)}{2}=cx+d,$ де c і d — сталі. Підставмо цей вираз у рівність з умови:

$$f^2(x+y)-(f^2(x)+2f(xy)+f^2(y))=(cx+cy+d)^2-((cx+d)^2+2(cxy+d)+(cy+d)^2)=$$

$$=\cancel{c^2x^2}+\cancel{c^2y^2}+\cancel{d^2}+2(c^2xy+\cancel{cdx}+\cancel{cdy})-(\cancel{c^2x^2}+\cancel{2cdx}+\cancel{d^2}+2(cxy+d)+\cancel{c^2y^2}+\cancel{2cdy}+d^2)=$$

$$=2c^2xy-2(cxy+d)-d^2=xy(2c^2-2c)-(2d+d^2)\equiv 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}2c^2-2c=0,\\2d+d^2=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}2c(c-1)=0,\\d(d+2)=0.\end{cases}$$

Відповідно, підходять значення $c\in\{0,1\},\ d\in\{0,-2\}$ і лише вони. Функція f при цьому має вигляд $f\equiv 0,\ f\equiv -2,\ f(x)=x$ чи $f(x)=x-2.$

Четвертий тур

10. ***Відповідь:*** а) так; б) ні.

***Розв'язання*. а)** Потрібне розбиття задають класи лишків за модулем 3:

$$A=\{3k+1\,|\,k\in\mathbb{Z}\},\ B=\{3k+2\,|\,k\in\mathbb{Z}\},\ C=\{3k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}.$$

Маємо $A+B=C,\ B+C=B,\ C+A=A.$ Тому множини $A+B,\ B+C$ і $C+A$ справді не перетинаються.

б) Припустімо, відповідне розбиття множини раціональних чисел існує. Розглянемо довільну трійку елементів $a\in A,\ b\in B,\ c\in C$ і покажемо таке:

$$a+b-c\in C,\ b+c-a\in A,\ c+a-b\in B.$$

Нехай $x=a+b-c.$ Тоді $x+c=a+b.$ Тож, урахувавши $(A+C)\bigcap(A+B)=\varnothing,$ дістанемо $x\notin A,$ а з $(B+C)\bigcap(A+B)=\varnothing$ отримаємо $x\notin B.$ Таким чином, $a+b-c=x\in C.$ Аналогічно доводяться й два інші включення.

Із $a+b-c\in C$ випливає $A+B\subset C+C.$ Аналогічно $B+C\subset A+A$ і $C+A\subset B+B.$ Доведімо, що виконуються також і зворотні включення. Для цього виберемо довільні елементи $a\in A,\ b\in B,$ $c_1\in C,\ c_2\in C.$ Як показано вище, $b+c_1-a\in A.$ Тому

$$c_1+c_2-a=c_2+(b+c_1-a)-b\in B.$$

Звідси $C+C\subset A+B.$ Аналогічно $A+A\subset B+C$ і $B+B\subset C+A.$ Отже,

$$A+B=C+C,\ B+C=A+A,\ C+A=B+B.$$

Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що число 0 належить множині C. У такому випадку $A=\{0\}+A\subset C+A$ і $B=B+\{0\}\subset B+C.$ А оскільки множина $A+B$ не перетинається з множинами $C+A$ і $B+C,$ то вона не перетинається і з множинами A та B, тобто цілком лежить у множині $\mathbb{Q}\setminus(A\bigcup B)=C.$ Отже, $C+C=A+B\subset C.$ З іншого боку, $C=C+\{0\}\subset C+C.$ У підсумку дістали

$C+C=C.$

Зауважимо, що операцію «складання» множин можна природним чином узагальнити на довільну кількість операндів: «сумою» множин $A_1+A_2+...+A_n$ уважатимемо множину, що складається з тих і лише тих чисел, які можна подати як суму $a_1+a_2+...+a_n$, де $a_i\in A_i$, $1\leqslant i\leqslant n.$ Домовившись про таке позначення, наслідком зі співвідношення $A+B=C+C$ запишемо

$$A+B+C=(A+B)+C=(C+C)+C=C+C=C.$$

Разом із тим з рівностей $B+C=A+A$ і $C+A=B+B$ випливає відповідно

$$A+B+C=A+A+A \text{ і } A+B+C=B+B+B.$$

Таким чином,

$$A+A+A=B+B+B=C+C+C=A+B+C=C.$$

Тоді незалежно від того, до якої з трьох множин належить раціональне число *x*, має виконуватись $3x=x+x+x\in C.$ Але, взявши довільний елемент $a\in A$ і розглянувши число $x=\dfrac{a}{3}\in\mathbb{Q},$ одержимо $a=3x\in C.$ Прийшли до суперечності.

11. ***<u>Розв'язання</u>.*** Нехай множина простих чисел, що ділять числа вигляду $2^{2^n}+a,$ скінченна і дорівнює $\{p_1, p_2, ..., p_k\},$ $k\geqslant 1.$ Хай *n* — деяке натуральне число, а набір цілих невід'ємних чисел $\alpha_i,$ $1\leqslant i\leqslant k,$ визначено з розкладу $2^{2^n}+a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_k}.$ Розв'язання полягатиме у знаходженні натурального $m>n,$ для якого число $2^{2^m}+a$ не ділиться на $p_i^{\alpha_i+1},$ $1\leqslant i\leqslant k.$ Цей факт суперечитиме очевидній нерівності $2^{2^m}+a>2^{2^n}+a,$ оскільки жодного простого дільника поза множиною $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$ число $2^{2^m}+a$ мати не може. Нам достатньо знайти таке *m*, що для нього $2^{2^m}\equiv 2^{2^n} \pmod{p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_k+1}},$ бо тоді $2^{2^m}+a\equiv 2^{2^n}+a\not\equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i+1}},$ $1\leqslant i\leqslant k.$

Нехай $a=2^{a_1}\cdot a_2,$ де a_1 — ціле невід'ємне, а a_2 — непарне натуральне число. Для довільних *n*, що задовольняють умову $2^n>a_1,$ маємо $2^{2^n}+a=2^{2^n}+2^{a_1}\cdot a_2=2^{a_1}(2^{2^n-a_1}+a_2)\not\vdots\, 2^{a_1+1}.$ Таким чином, при сталому *a* існує максимальний степінь двійки $2^{l_1},$ на який може поділитися число $2^{2^n}+a.$ Найбільший степінь двійки $2^r,$ на який ділиться число $p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_k+1},$ не може перевищувати $2^{l_1+1}.$ Узявши таке *n*, що $2^n\geqslant l_1+1,$ ми забезпечимо подільність числа 2^{2^n} на $2^r.$ Щоб різниця $2^{2^m}-2^{2^n}=2^{2^n}(2^{2^m-2^n}-1)$ поділилася на $p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_k+1},$ залишається забезпечити подільність числа $2^{2^m-2^n}-1=2^{2^n(2^{m-n}-1)}-1$ на непарне число $p=\dfrac{p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_k+1}}{2^r}.$ Якщо множина простих чисел $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$ не містить двійки, то $r=0$ і $p=p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_k+1}.$ Інакше без утрати загальності можемо вважати $p_k=2,$ звідки $r=\alpha_k+1$ і $p=p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdot...\cdot p_{k-1}^{\alpha_{k-1}+1}.$ Якщо покласти $k'=k$ у першому випадку і $k'=k-1$ у другому, то в кожному з двох випадків зможемо записати $p=p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdot...\cdot p_{k'}^{\alpha_{k'}+1},$ причому $p_1,$ $p_2,$ ..., $p_{k'}$ — непарні прості числа.

Далі через φ позначатимемо функцію Ейлера. Найбільший степінь двійки, на який ділиться число $(p_1-1)(p_2-1)\cdot...\cdot(p_{k'}-1),$ не залежить від вибору *n*. Хай він дорівнює $2^{l_2}.$ Тоді найбільший степінь двійки, на який ділиться число $\varphi(p)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot...\cdot p_{k'}^{\alpha_{k'}}(p_1-1)(p_2-1)\cdot...\cdot(p_{k'}-1),$ також дорівнює $2^{l_2}.$ Узявши $n\geqslant l_2$ (не забуваючи при цьому про умову $2^n\geqslant l_1+1),$ ми забезпечимо подільність числа 2^n на $2^{l_2}.$ Якщо вдасться дотриматися ще й подільності $2^{m-n}-1$ на непарне число $q=\dfrac{\varphi(p)}{2^{l_2}},$ то матимемо $2^n(2^{m-n}-1)\,\vdots\,\varphi(p).$ А тоді, враховуючи непарність *p*, з теореми Ейлера дістанемо бажане співвідношення $2^{2^n(2^{m-n}-1)}\equiv 1 \pmod p.$ Залишається покласти $m=n+\varphi(q)$: у такому випадку, враховуючи непарність числа *q*, $2^{m-n}=2^{\varphi(q)}\equiv 1 \pmod q.$

12. ***<u>Відповідь:</u>*** $(2013\cdot 2012+2)\cdot 2^{2013}$.

<u>Розв'язання.</u> Уважатимемо, що кольори, в які фарбують точки, — синій та жовтий. Проаналізуймо розфарбування точок, які є вершинами опуклого 2013-кутника. Їх можна розбити на групи однаково пофарбованих сусідніх точок: наприклад, одна з груп може складатися з п'яти жовтих точок, наступна за рухом годинникової стрілки — з десяти синіх, наступна — з однієї жовтої і т. д. Очевидно, групи жовтих і синіх точок чергуватимуться.

Припустімо, груп хоча б чотири. Занумеруємо всі групи, починаючи з довільного місця, за годинниковою стрілкою. Якщо перша й третя групи мають жовтий колір, то друга й четверта групи — сині, і навпаки. Але будь-який шлях по відрізках між точками з першої і третьої груп перетинає довільний шлях по відрізках між точками з другої і четвертої груп. Тому гарним таке розфарбування не є.

Рівно три групи точок незалежно від способу розфарбування утворитися не може. Таким чином, гарне розфарбування даватиме або дві групи однокольорових точок на 2013-кутнику, або одну групу (якщо всі вершини многокутника пофарбовані однаково). Покажемо тепер, що довільне розфарбування, яке дає або одну, або дві групи, буде гарним незалежно від конкретного розташування точок та незалежно від вибору кольорів для внутрішніх 2013 точок многокутника.

<u>Лема</u>. Нехай на площині задано n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Будь-яке розфарбування, що дає не більше ніж дві групи однокольорових вершин на опуклій оболонці цих n точок, є гарним розфарбуванням.

<u>Доведення</u>. Доведемо лему з допомогою методу математичної індукції. Для $n \leqslant 3$ твердження леми очевидне. Нехай тепер $n \geqslant 4$ і для довільного набору з $n-1$ точки твердження вже доведене. Якщо на опуклій оболонці n точок утворилися дві групи однокольорових вершин, то без утрати загальності можемо припустити, що синіх точок серед вершин не менше, ніж жовтих. Тоді знайдеться синя точка B, з одного боку від якої розташована жовта точка A, а з іншого боку — ще одна синя точка C. А якщо на опуклій оболонці утворилася лише одна група вершин, то виберемо вершину B довільним чином і через A та C позначимо сусідні з нею вершини опуклої оболонки.

Вилучимо точку B. Опукла оболонка решти $n-1$ точки або складатиметься з тих самих вершин, що й опукла оболонка n точок (за винятком вершини B), або, крім них, міститиме між вершинами A та C деяку кількість додаткових вершин. У першому випадку можемо застосувати індукційне припущення до множини з $n-1$ точки, після чого знову додати вершину B і сполучити її відрізком з вершиною C. У другому випадку можливі два варіанти. Якщо всі додаткові вершини жовті, то й цього разу можна застосувати індукційне припущення до множини точок без вершини B, після чого сполучити B з C. У випадку ж, якщо серед додаткових вершин є хоча б одна синя точка D, повернемо вершину B, а натомість приберемо D. Тепер застосуємо індукційне припущення до утвореної множини з $n-1$ точки, після чого сполучимо відрізком точку D з вершиною B. Відрізок BD не перетинатиметься з жодним іншим проведеним відрізком XY: якщо ні одна з точок X та Y не збігається з B, то відрізок XY лежить усередині або на межі опуклої оболонки множини всіх точок, крім B, а відрізок BD лежить поза нею; якщо одна з точок X та Y збігається з B, то відрізки перетинаються у точці B і не можуть мати спільних внутрішніх точок. На цьому доведення леми завершено.

Отже, залишається підрахувати кількість розфарбувань, що дають одну або дві групи однокольорових вершин 2013-кутника. Якщо серед вершин многокутника знайдуться точки, пофарбовані як у жовтий, так і в синій кольори, то можна виділити першу за рухом годинникової стрілки жовту точку. Позиція такої точки і загальна кількість жовтих точок однозначно визначатимуть розфарбування вершин багатокутника. Маємо 2013 позицій і 2012 варіантів кількості жовтих точок (1, 2, ..., 2012). Усього $2013\cdot 2012$ варіантів. Розфарбувати ж 2013 вершин в один колір є, очевидно, рівно два способи.

За будь-якого розфарбування вершин многокутника решту точок можна пофарбувати довільним чином, тобто в один із 2^{2013} способів. Звідси отримуємо відповідь: є рівно $(2013\cdot 2012+2)\cdot 2^{2013}$ гарних розфарбувань.