XIX олімпіада з математики
Русанівського ліцею

05 квітня 2014 р.

6 клас. І тур.

1. Двоголові та семиголові дракони зібралися на нараду. На початку наради Король драконів підрахував кількість присутніх по головах. Своєю середньою головою він озирнувся навкруги та побачив 25 голів. Скільки всього драконів прийшло на нараду?

Розв'язання:

З умови зрозуміло, що Король - семиголовий дракон. Віднімемо від 25 голів, підрахованих Королем драконів, 6 голів, що належать йому. Залишиться 19 голів. Усі дракони, що залишилися, не можуть бути двоголовими (оскільки 19 - непарне число). Семиголовий дракон може бути тільки 1 (Якщо 2, то для двоголових залишиться непарна кількість голів, а для 3 семиголових драконів голів не вистачає: 7х3 = 21 > 19). Віднімемо від 19 голів 7 і отримаємо загальну кількість голів, що належать двоголовим драконам. Отже, двоголових драконів було (19 - 7) : 2 = 6. Всього драконів: 6 +1 +1(Король) = 8 драконів.

Відповідь: 8 драконів.

2. Число k складається з цифр «1» і «2». Доведіть, що число k + 2014 – складене.

Розв'язання:

Якщо k закінчується цифрою «1» , то k + 2014 закінчується цифрою «5» і ділиться на 5. Якщо ж k закінчується цифрою «2» , то k + 2014 закінчується цифрою «6» і ділиться на 2. Отже, в будь-якому випадку число k + 2014 – складене.

3. Петрик одягнув чоботи-скороходи і вирушив з міста А в місто В. О $12^{\underline{00}}$ на відстані 20 км від міста А він знайшов килим-літак і вирішив продовжити шлях на ньому. За 10 км до міста В килим-літак зламався, і Петрику довелося закінчити шлях у чоботях. Внаслідок цього Петрик прибув до міста В рівно о $14^{\underline{00}}$. Скільки часу витратить Петрик на зворотний шлях, якщо відомо, що швидкість килима в 3 рази більша за швидкість чобіт?

Розв'язання:

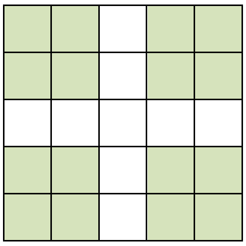
Нехай на килимі Петрик пролетів х км. Тоді на них і ще 10 км у чоботях він витратив 2 години. На зворотному шляху Петрику доведеться на ці х км витратити в 3 рази більше часу (бо швидкість килима в 3 рази більша від швидкості чобіт). Але й решта шляху складатиме 10 + 20 = 30 км, що в 3 рази більше, ніж 10 км. Отже, Петрик витратить в 3 рази більше часу на зворотний шлях з міста В до міста А, ніж на х км на килимі та ще 10 км в чоботях (тобто 2 години). Значить, на зворотний шлях він витратить 2·3= 6 годин.

Відповідь: 6 годин.

4. У білому квадраті 5х5 клітинок маляр хоче пофарбувати деякі клітинки в зелений колір так, щоб у кожному квадраті 3х3 білих клітинок було більше, ніж зелених, а в кожному квадраті 4х4 зелених клітинок було більше, ніж білих. Чи зможе він це зробити?

Розв’язання:

Так, зможе. Приклад розфарбування:



5. На столі лежить 10 аркушів паперу. Хлопчик бере деякі з них і розриває на 10 шматочків. Потім деякі з них ще раз розриває на 10 шматочків і так далі. Чи зможе хлопчик у результаті своїх дій отримати 2014 шматочків?

Розв’язання:

Оскільки на столі вже лежало 10 аркушів, то в результаті дій хлопчика треба отримати 2014 – 10 = 2004 шматочка. Після кожної операції розривання на столі стає на 9 шматочків паперу більше, ніж було. Але 2004 не ділиться націло на 9. Отже, хлопчик не зможе отримати 2014 шматочків.

Відповідь: Ні.

6 клас. II тур.

6. Відомо, що серед тверджень $2x > 70$, $x < 100$, $4x > 25$, $x > 10$ і $x > 5$ для натурального числа x є рівно два істинних і три хибних. Знайдіть x.

Розв’язання:

Твердження $2x > 70$, $x > 10$ та $4x > 25$ не можуть бути істинними, оскільки в противному випадку кількість істинних тверджень більше двох. Тому твердження $x > 5$ та $x \le 6{,}25$ – істинні. А оскільки x – натуральне, то $x = 6$.

Відповідь: $x = 6$.

7. У Мексиці екологи домоглися прийняття закону, за яким кожний автомобіль хоча б один день на тиждень повинен відпочивати (власник повідомляє поліції номер автомобіля та «вихідний» день тижня цього автомобіля). У деякій сім’ї 8 дорослих, і вони всі бажають їздити на автомобілі щодня (кожний – у своїх справах). Яка найменша кількість автомобілів повинна бути в такій сім’ї?

Розв’язання:

Зрозуміло, що автомобілів повинно бути не менше 8. Якщо кожного дня відпочиває не більше одного автомобіля, то всього автомобілів не більше, ніж днів тижня (тобто не більше 7). Отже, якогось дня відпочиває 2 автомобілі, і цього дня потрібно ще 8 автомобілів для забезпечення потреб 8 дорослих. Всього 10 автомобілів. Ми довели, що кількість автомобілів не може бути меншою 10. А 10 автомобілів достатньо. Приклад графіку відпочинку: пн. - №1; №8; вт. - №2; №9; сер. - №3; №10; чт. - №4; пт. - №5; сб. - №6; нд. - №7.

Відповідь: 10 автомобілів.

8. Остап та Олеся разом зібрали не більше 70 грибів, з них 52% білих. Коли Олеся викинула три найменших гриба, то білі склали рівно половину всіх грибів. Скільки грибів зібрали Остап та Олеся?

Розв'язання:

Нехай Остап та Олеся разом зібрали x грибів. З них білих - 52%. Тобто білих грибів було $\frac{52}{100}x = \frac{13}{25}x$. Оскільки розглядається ціла кількість грибів, то x має бути кратним 25. Тоді $x = 25$ або $x = 50$. Варіант $x = 50$ не підходить, оскільки коли віднімемо 3 гриба, залишиться 47, що не кратне 2. Значить грибів зібрали 25, серед них 13 білих. Коли викинули 3 найменших, залишилось 22 гриба, серед яких 11 білих. Тобто серед викинутих опинилось 2 білих гриба.

Відповідь: 25 грибів.

7 клас. І тур.

1. Чому дорівнює значення виразу $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{225}\right)$?

Розв'язання:

Помітимо, що у кожній дужці цього виразу записано різницю квадратів. Виконаємо такі перетворення:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{225}\right)=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{15}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{15}=\frac{8}{15}$$

Відповідь: $\frac{8}{15}$.

2. Марічка записала на дошці деякі 5 чисел. Григорій попарно додав ці числа та отримав такі 10 чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Які числа було записано на дошці?

Розв'язання:

Запишемо шукані 5 чисел у порядку неспадання — $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$. Зрозуміло, що найменшій з десяти отриманих сум відповідають два найменші із записаних на дошці чисел. Тобто $a_1 + a_2 = 0$.

У той же час, найбільшій з цих сум відповідатимуть два найбільші числа: $a_4 + a_5 = 15$.

Якщо ж скласти усі 10 попарних сум, то, оскільки кожне з чисел додавалося до усіх чисел на дошці, окрім самого себе (тобто використовувалося Гришком по 4 рази), отримаємо рівність:

$$4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 72$$

Звідки сума усіх чисел Марічки:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 18$$

Тоді $a_3 = 18 - (a_1 + a_2) - (a_4 + a_5) = 18 - 0 - 15 = 3$.

Виходячи з тих же міркувань, другій за величиною попарній сумі відповідатимуть числа a_1 та a_3: $a_1 + a_3 = 2$. Звідки $a_1 = 2 - a_3 = 2 - 3 = -1$, а тому $a_2 = 0 - a_1 = 0 - (-1) = 1$.

Аналогічно отримаємо, що $a_3 + a_5 = 13$. Тоді $a_5 = 13 - a_3 = 13 - 3 = 10$, а $a_4 = 15 - a_5 = 15 - 10 = 5$.

Отже, набір шуканих чисел — це –1; 1; 3; 5; 10.

Простим перебором можемо впевнитися, що решта попарних сум співпадають з тими, які отримав Гришко.

Відповідь: –1; 1; 3; 5; 10.

3. Минулого року, спізнюючись на XVIII Русанівську олімпіаду, Наталка вирішила надолужити згаяний у заторі час та побігла вниз по ескалатору метро. Спускаючись зі швидкістю 2 сходинки за секунду, вона нарахувала на ескалаторі 140 сходинок. Сьогодні, у день XIX олімпіади, історія повторилася, однак цього разу Наталці загрожувало ще більше запізнення.

Тим же ескалатором вона бігла швидше — 3 сходинки за секунду, а нарахувала на 28 сходинок більше. «Дивно виходить, — замислилася Наталка. — Чим швидше біжиш, тим довшим стає ескалатор». Скільки сходинок вона нарахує завтра, запізнюючись на IX олімпіаду з головоломок, якщо ескалатор зламається?

Розв'язання:

Нехай *x* — кількість сходинок на відкритій частині ескалатора. Саме таку відстань має подолати Наталка, аби спуститися на ескалаторі донизу. Причому ця відстань складається з числа сходинок, які пробігла Наталка, та числа сходинок, на які спустився сам ескалатор.

Минулого року на спуск ескалатором Наталка витратила $140:2=70$ секунд, а цьогоріч — $(140+28):3=56$ секунд. Оскільки швидкість ескалатора *v* залишалася постійною в обох випадках, то, виходячи з наведених вище міркувань, можна записати наступні рівняння:

$$140+v\cdot 70=x,$$

$$(140+28)+v\cdot 56=x.$$

Прирівнюючи ліві частини цих рівнянь (довжина ескалатора протягом року також не змінювалася), отримаємо:

$$140+v\cdot 70=(140+28)+v\cdot 56,$$

$$14v=28,$$

$$v=2.$$

Підставляючи отримане значення власної швидкості ескалатора в одне з двох рівнянь, отримаємо, що *x* = 280.

Відповідь: 280 сходинок.

4. Нехай *K* — точка дотику вписаного в трикутник *ABC* кола до сторони *AC*. Із точки *K* до сторони *BC* проведено перпендикуляр, який перетнув бісектрису кута *ACB* у точці *E*. Доведіть, що *KI* = *KE*, де *I* — інцентр трикутника *ABC*. (*О. Карлюченко*)

Розв'язання:

Нехай *L* — основа перпендикуляра, опущеного з точки *K* на сторону *BC* (рис. 1). Оскільки *CI* — бісектриса $\angle ACB$, то $\angle ACI=\angle BCI$.

З прямокутного трикутника *CKI*: $\angle CIK=90°-\angle KCI=90°-\angle ACI$.

Аналогічно з прямокутного трикутника *CLE*: $\angle CEL=90°-\angle LCE=90°-\angle BCI$.

Отже, $\angle CIK=\angle CEL$. Оскільки, в свою чергу, $\angle CEL=\angle KEI$ (як вертикальні), то $\angle KEI=\angle CIK=\angle EIK$, звідки слідує рівнобедреність трикутника *IKE*, причому *KI* = *KE*, що й необхідно було довести.

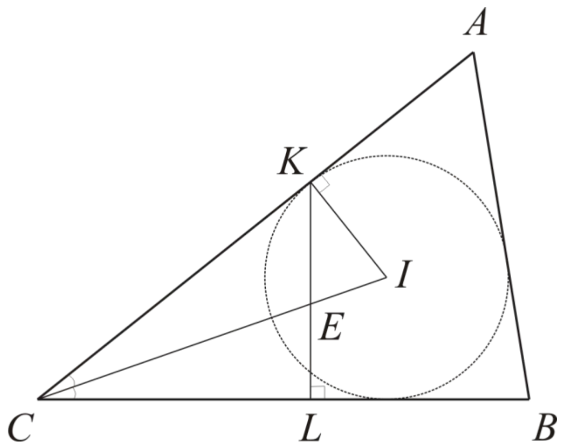


Рис. 1

5. Нехай *H* — основа висоти, проведеної з вершини *A* до сторони *BC* трикутника *ABC*. Точка *L* — основа бісектриси $\angle AHC$ у відповідному трикутнику, а *M* — середина відрізка *AB*. Відновіть трикутник *ABC* за точками *H*, *L* та *M*. (*О. Грищенко*)

Розв'язання:

З'єднаємо точку *H* з *L* (рис. 2). Оскільки *HL* має бути бісектрисою прямого $\angle AHC$, то, відклавши по обидві сторони відрізка *HL* кути по 45°, отримаємо прямі, одна з яких містить сторону *BC* трикутника *ABC*, а інша — висоту *AH*.

Аналіз також показує, що *HM* — медіана прямокутного трикутника *AHB*, проведена до гіпотенузи *AB*, а тому дорівнює її половині. Отже, будуючи коло з центром у заданій точці *M* радіуса *HM*, отримаємо у перетині з побудованими прямими вершини *A* та *B*. Завершує побудову трикутника *ABC* побудова прямої *AL*, яка перетинає пряму *BH* у вершині *C*. Після цього залишається лише з'єднати вершини *A* та *B*.

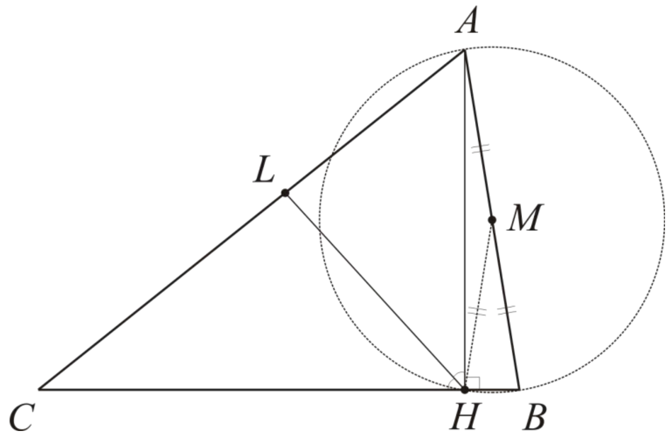


Рис. 2

7 клас. II тур.

6. Одного разу в Простоквашино листоноша Пєчкін не хотів віддавати посилку. Тоді кіт Матроскін запропонував йому зіграти в таку гру: кожним своїм ходом листоноша пише в рядок зліва направо по одній букві, довільно чергуючи Р та Л, допоки в рядку не буде всього 11 букв. Матроскін після кожного його ходу, якщо хоче, може поміняти місцями будь-які дві літери. Якщо в кінці гри виявиться, що записане слово є паліндромом (тобто однаково читається зліва направо та справа наліво), то Пєчкіну доведеться віддати посилку. Чи зможе Матроскін грати в цю гру так, щоб гарантовано отримати посилку?

Розв'язання:

Матроскін може грати наступним чином. До 6-го ходу Пєчкіна він буде довільно переставляти букви у рядку (або відмовлятися від ходу). Коли ж листоноша напише 7-му букву, Матроскін порівнює її з 5-ю (симетричною відносно центральної — 6-ї букви). Якщо вони співпадають, він може поміняти їх місцями (або знову відмовитися від ходу). Якщо ці букви не співпадають, то одна з них не співпадає також і з 6-ю буквою. Тоді Матроскін міняє місцями цю букву з 6-ю. Таким чином, після ходу Матроскіна 7-ма буква співпадатиме з 5-ю.

Аналогічно Матроскін може ходити й далі, домагаючись співпадіння 8-ї та 4-ї, 9-ї та 3-ї, 10-ї та 2-ї, і, врешті-решт, 11-ї та 1-ї букв.

У результаті буде отримано паліндром незалежно від ходів Пєчкіна, і кіт Матроскін гарантовано отримає посилку.

Відповідь: Так, зможе.

7. Серед 50 першокласників деякі знають усі букви, крім «р», яку просто пропускають у написанні слів, а інші знають усі букви, крім «б», яку теж пропускають. На уроці вчитель попросив 10 учнів написати слово «бак», 18 інших учнів — слово «рак», а решту — слово «брак». У результаті слова «бак» та «рак» виявилися написаними по 15 разів. Скільки першокласників написали своє слово правильно?

Розв'язання:

Помітимо, що ніхто з першокласників, які мали написати слово «брак», не виконав завдання вчителя правильно, оскільки жоден учень не знає одночасно і букву «р», і букву «б»: ці учні написали або «бак», або «рак».

Отже, правильно написали свої слова деякі з тих 10 + 18 = 28 учнів, які мали написати слово «бак» або «рак».

Помітимо також, що у результаті учнями були написані лише слова «бак», «рак» та «ак», причому оскільки перші два слова написали по 15 разів, то слово «ак» написали 50 – 15 – 15 = 20 першокласників. А отже, решта 28 – 20 = 8 першокласників виконали своє завдання правильно.

Відповідь: 8 першокласників.

8. Відновіть трикутник *ABC* за прямою *a*, яка містить сторону *BC* трикутника, та точками *W* та *D*. Точка *W* є точкою перетину прямої, що містить бісектрису $\angle BAC$, з описаним навколо трикутника *ABC* колом, а *D* — діаметрально протилежна вершині *A* точка описаного кола. (*С. Яковлєв*)

Розв'язання:

Для виконання побудови доведемо спершу, що якщо *O* — центр описаного навколо трикутника *ABC* кола, то $OW \perp BC$ (рис. 3). Довести це можна, наприклад, так. Центральний $\angle AOW$ спирається на дугу *AW*, на яку також спираються вписані $\angle BAW = \dfrac{\angle BAC}{2} = \dfrac{A}{2}$ та $\angle ACB = C$. Отже, $\angle AOW = A + 2C$. Виходячи з рівнобедреності трикутника *AOW* (*OA* = *OW* як радіуси описаного навколо трикутника *ABC* кола),

$$\angle AWO = \frac{180° - \angle AOW}{2} = 90° - \frac{A}{2} - C.$$

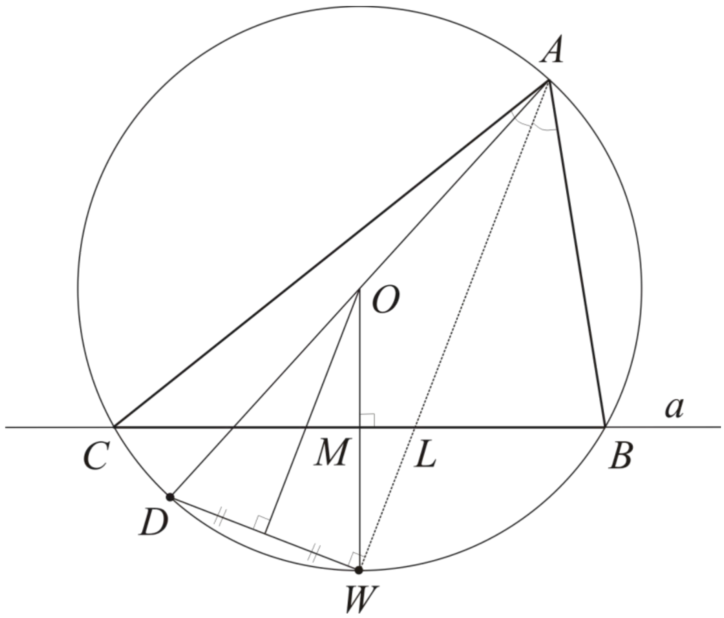


Рис. 3

У свою чергу, $\angle CLW$, який лежить всередині описаного кола, можна обчислити як півсуму дуг, які він стягує: $\angle CLW = \dfrac{\cup CW + \cup AB}{2} = \dfrac{A + 2C}{2} = \dfrac{A}{2} + C$. У трикутнику *LMW* сума двох кутів $\angle LWM + \angle MLW = \angle AWO + \angle CLW = \left(90° - \dfrac{A}{2} - C\right) + \left(\dfrac{A}{2} + C\right) = 90°$. Отже, цей трикутник є прямокутним, причому $\angle LMW = 90°$.

Далі виконуємо необхідну побудову. З'єднаємо точки *W* та *D*. Пряма, яка проходить через *W* та перпендикулярна заданій прямій *a*, у перетині з серединним перпендикуляром до відрізка *WD* дасть точку *O*. Коло з центром *O* радіуса *OD* = *OW* перетне пряму *a* у шуканих вершинах *B* та *C*. Пряма ж *DO* перетне це коло у вершині *A*.

З'єднуючи *A* з *B* та *A* з *C*, отримаємо трикутник *ABC*.

8 клас.

1. В одному рядку розташовано 2014^2 відкритих коробок. Хлопчик підходить до кожної другої коробки та закриває її. Потім підходить до кожної третьої та змінює її стан на протилежний (якщо коробка відкрита, то закриває її, якщо коробка закрита – відкриває). Потім підходить до кожної четвертої та виконує ті ж самі дії. Так він робить 2014^2 разів. Скільки коробок у результаті таких дій залишаться відкритими?

Розв'язання:

Розглянемо порядкові номери коробок. До кожної коробки (починаючи з другої) хлопчик підходить стільки разів, скільки у її номера дільників, відмінних від 1. Якщо номер коробки має парну кількість дільників відмінних від 1, то в результаті виконаних дій стан коробки не зміниться, тобто коробка залишиться відритою. Якщо ж номер коробки має непарну кількість дільників відмінних від 1, то стан коробки зміниться – вона буде закритою. Відомо, що непарну кількість дільників мають тільки числа, що є повними квадратами. Отже відкритими залишаться ті коробки, порядковий номер яких є повним квадратом. Тому для знаходження відповіді необхідно підрахувати кількість повних квадратів серед чисел від 1 до 2014^2, а таких чисел 2014.

Відповідь: 2014.

2. Натуральні числа *a, b, c* такі, що $\frac{abc+a+c}{bc+1} = \frac{6045}{2014}$. Знайти $\frac{abc+a+c}{ab+1}$.

Розв'язання:

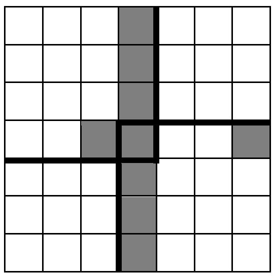
Розглянемо рівність $\frac{abc+a+c}{bc+1} = a + \frac{c}{bc+1}$. Зрозуміло, що перший доданок в цій рівності більше одиниці, а другий менше одиниці. Але, оскільки кожне число представляється у такому вигляді єдиним чином та $\frac{6045}{2014} = 3 + \frac{3}{2014}$, отримуємо $a = 3$, $\frac{c}{bc+1} = \frac{3}{2014} \to \frac{bc+1}{c} = \frac{2014}{3} \to b + \frac{1}{c} = 671 + \frac{1}{3}$. В силу той же єдності отримуємо $b = 671$, $c = 3$. Отже, $\frac{abc+a+c}{ab+1} = \frac{3\cdot671\cdot3+3+3}{3\cdot671+1} = \frac{6045}{2014}$.

(або оскільки $a = c$, то $\frac{abc+a+c}{ab+1} = \frac{abc+a+c}{cb+1} = \frac{6045}{2014}$).

Відповідь: $\frac{6045}{2014}$.

3. Яку найменшу кількість клітинок необхідно зафарбувати у квадраті 7х7 клітинок, щоб у кожному квадраті 4х4 було рівно 5 зафарбованих клітинок?

Розв'язання:

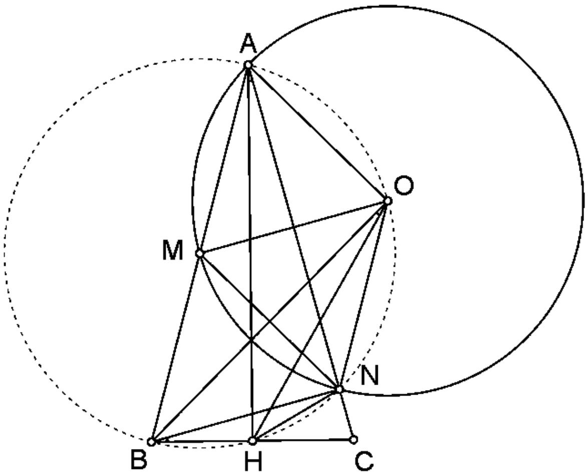


З умови мінімальності одразу можна сказати, що повинна буди зафарбована центральна клітинка. Розглянемо два квадрати 4х4, виділені на малюнку. Їх спільна клітинка вже зафарбована. Оскільки в кожному з них треба зафарбувати рівно 5 клітинок, то, крім спільної, в кожному з них треба зафарбувати ще по 4 клітинки. Тобто найменша кількість зафарбованих клітинок: 1+4+4=9. Приклад такого розфарбування на малюнку.

Відповідь: 9 клітинок.

4. У рівнобедреному трикутнику *ABC* (*AB=AC*) точки *M* та *N* – основи медіани та висоти, проведених з вершин *C* та *B* відповідно, а *O* – центр кола, описаного навколо трикутника *AMN*. *H* – середина *BC*. Виявилося, що *OH* є бісектрисою кута *BON*. Знайти кути трикутника *ABC*. (*М. Плотніков*)

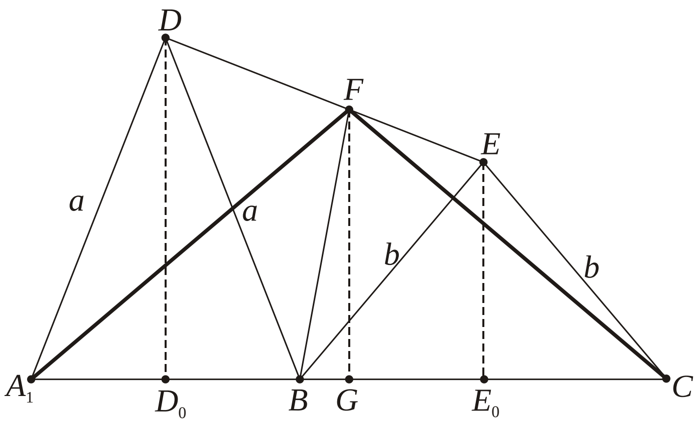
<u>*Розв'язання*</u>:



Оскільки точка *B* лежить поза колом, що описане навколо трикутника *MNA*, точка *O* не належить серединному перпендикуляру відрізка *BN*. Тоді, оскільки *HN=HB*, а *OH* є бісектрисою кута *BON*, точки *O*, *H*, *B*, *N* належать одному колу. Отже, кути *BOH*, *NBH* та *CAH* рівні. Тому точка *O* належить колу з центром *M* та радіусом *AM*. Тому трикутники *NOM* та *AMO* рівносторонні, а з цього випливає, що кут при вершині *A* дорівнює 30^0, а при вершинах *B*, *C* дорівнюють 75^0.

5. Для точки *B* на відрізку *AC* знайшлися точки *D* та *E* такі, що *AD=BD=BC* та *AB=BE=EC*. Бісектриса кута *DBE* перетинає *DE* в точці *F*. Доведіть, що *AF=FC*. (*М. Плотніков*)

<u>*Розв'язання*</u>:

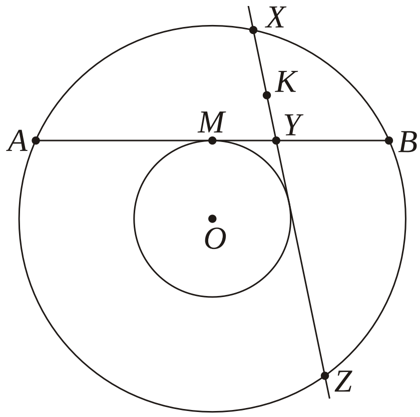


Опустимо на пряму *AC* перпендикуляри з точок *D, E, F* які потраплять в точки D_0, E_0, *G*.
Позначимо *AD* = *BD* = *BC* = *a* та *AB* = *BE* = *EC* = *b*.
Згідно властивості бісектриси: $\frac{DF}{FE} = \frac{a}{b}$
Тоді, згідно теоремі Фалеса: $\frac{D_0G}{GE_0} = \frac{a}{b}$
Але $D_0E_0 = \frac{a+b}{2}$, тому $D_0G = \frac{a}{2}$, а $GE_0 = \frac{b}{2}$ → *AG* = *GC* → Δ*AFC* – рівнобедрений.

6. На площині дано точки *A* та *B*. Провели відрізок *AB* та будь-яку дугу з кінцями в *A* і *B*, меншу 180^{o}. Усередині отриманого сегмента вибрали довільну точку *K*. Побудувати пряму через точку *K*, яка перетне дугу в точці *X*, а відрізок у точці *Y* так, що *XY = YB*. (*Є. Діомідов*)

Розв'язання:

Продовжимо дугу до кола. Нехай воно вдруге перетинає пряму XY у точці Z. $\triangle BXY$ рівнобедрений, тому $\angle BXZ = \angle XBA \Rightarrow AX = BZ$, тобто $AXBZ$ – рівнобічна трапеція. Як відомо, у рівнобічної трапеції діагоналі рівні, а рівні хорди рівновіддалені від центра. Тому прямі AB та XY рівновіддалені від центра.



Провівши аналогічні міркування в зворотному напрямку, можна довести що якщо прямі AB та XY рівновіддалені від центра, то $XY = YB$ або $XY = YA$.

Звідси випливає побудова:

1. Будуємо центр O дуги.
2. Опускаємо з нього перпендикуляр OM на AB.
3. Будуємо коло з центром O та радіусом OM.
4. Проводимо з точки K дотичні до цього кола. Неважко показати, що для однієї з цих двох дотичних буде виконуватись $XY = YB$ (тобто вона є шуканою), а для іншої – $XY = YA$.

Командна олімпіада 9-10

1. У банку, у якій живе колонія бактерій, потрапляє вірус. Щосекунди кожен вірус атакує по одній бактерії, після чого вона перетворюється на вірус; потім кожна бактерія, що вціліла, ділиться навпіл на дві бактерії. Чи виживе колонія бактерій?

<u>*Розв'язання*</u>:

Нехай a_n та b_n – кількість бактерій та вірусів у *n*-ту секунду. Тоді за умовою маємо такі співвідношення:

$$b_{n+1} = 2b_n\,,\;\; a_{n+1} = 2(a_n - b_n)\,.$$

Оскільки початкове значення $b_0 = 1$, то $b_n = 2^n$. Звідси маємо:

$$a_n = 2a_{n-1} - 2^n = 2^2 \cdot a_{n-2} - 2\cdot 2^n = 2^3 \cdot a_{n-3} - 3\cdot 2^n = \ldots = 2^n \cdot a_0 - n\cdot 2^n = 2^n \cdot (a_0 - n)\,,$$

де a_0 – початкова кількість бактерій у банці. Таким чином, після проходження a_0 секунд кількість бактерій в банці дорівнюватиме нулю, а отже, колонія загине.

2. Знайти всі натуральні числа, які можна подати у вигляді

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b}\,,$$

де *a*, *b* та *c* – попарно взаємно прості натуральні числа.

<u>*Розв'язання*</u>:

Нам знадобиться наступне допоміжне твердження.

Якщо $\frac{x}{y}$ та $\frac{p}{q}$ є нескоротними дробами, і *y* та *q* взаємнопрості, то дріб $\frac{x}{y} + \frac{p}{q} = \frac{xq+yp}{yq}$ також є нескоротним. Дійсно, нехай цей дріб є скоротним, а отже, існує таке просте число *d*, на яке ділиться і yq, і $xq+yp$. Оскільки *y* та *q* взаємнопрості, то *d* є дільником лише одного з цих чисел; нехай $y \vdots d$. Тоді маємо, що $xq \vdots d$. Але *q* не може ділитись на *d*, бо *y* та *q* взаємнопрості, а *x* не може ділитись на *d*, бо інакше $\frac{x}{y}$ був би скоротним дробом. Отже, ми прийшли до протиріччя, звідки випливає вірність вихідного твердження.

Вираз $N = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b}$ можна подати у вигляді суми двох дробів, наприклад, $\frac{a+b}{c} + \frac{b(b+c)+a(a+c)}{ab}$. Знаменники цих дробів після скорочення залишаться взаємнопростими, отже, їх сума буде нескоротним дробом. Але за умовою їх сума є цілим числом; це можливо лише тоді, коли кожен вираз $\frac{a+b}{c}$, $\frac{b+c}{a}$, $\frac{a+c}{b}$ після скорочення є цілим числом.

Без обмеження загальності можна вважати, що $a \ge b \ge c$. Тоді $b+c \le 2a$, і $b+c$ може ділитись на *a* лише в одному з двох випадків:

1) $b+c = 2a$, звідки $a = b = c$. Оскільки всі три числа є попарно взаємнопростими, то вони дорівнюють одиниці. В цьому випадку $N = 6$.

2) $b+c = a$. Тоді $a+c = b+2c$ ділиться на *b*, звідки $2c$ ділиться на *b*. Оскільки *b* та *c* взаємнопрості і $b \ge c$, то ця умова може виконуватись лише в двох випадках: $b = 1$ та $b = 2$.

При $b=1$ маємо $c=1$, $a=2$ і $N=7$.

При $b=2$ маємо $c=1$, $a=3$ і $N=8$.

Отже, єдиними натуральними числами, що задовольняють умові задачі, є числа 6, 7 а 8.

3. Знайдіть усі функції $f:R\to R$, які для довільних дійсних *x* та *y* задовольняють умові:

$$f(f(x+y))\cdot f(x)=f(x^2)+x\cdot f(y).$$

(*Д. Хілько, В. Вовченко*)

Розв'язання:

Нехай $x=0$, тоді $f(f(y))\cdot f(0)=f(0)$, тобто або $f(f(y))=1$ для довільного *y*, або $f(0)=0$. Покажемо, що перший варіант неможливий.

Підставимо $y=f(1)$ у $f(f(y))=1$, маємо $f(f(f(1)))=1$; отже, $f(1)=f(f(f(1)))=1$. Підставимо тепер $x=1$, $y=0$ у вихідну рівність. Маємо:

$$f(f(1))\cdot f(1)=f(1)+f(0),$$

звідки $f(0)=0$. Але тоді $1=f(f(0))=f(0)=0$, що неможливо. Таким чином, умова $f(f(y))=1$ для довільного *y* не виконується, і остаточно маємо $f(0)=0$ для будь-якого розв'язку вихідного рівняння.

Підставимо у вихідну рівність $y=-x$, одержимо:

$$0=f(f(0))\cdot f(x)=f(x^2)+x\cdot f(-x),$$

звідки $f(x^2)=-x\cdot f(-x)$. Замінюючи *x* на $-x$, маємо:

$$f(x^2)=x\cdot f(x) \text{ для довільного } x.$$

Зокрема, порівнюючи обидва одержаних вирази, маємо $f(-x)=-f(x)$.

Отже, можна подати вихідну рівність у такий спосіб:

$$f(f(x+y))\cdot f(x)=x\cdot(f(x)+f(y)).$$

Ця рівність виконується при $x=0$ та при $y=-x$. Нехай існує такий $x\neq 0$, що $f(x)=0$; тоді $f(y)=0$ для довільного *y*, а отже, функція *f* буде константним нулем: $f(x)\equiv 0$.

Нехай тепер $f(x)\neq 0$ для всіх $x\neq 0$. Знайдемо всі такі *y*, що $f(y)=-f(x)$. Підставляючи, маємо $f(f(x+y))\cdot f(x)=x\cdot(f(x)+f(y))=0$, звідки $f(f(x+y))=0$, $f(x+y)=0$ та $y=-x$.

Тоді для $x\neq 0$ та $y\neq -x$ жоден з множників не дорівнює нулю, а тому можемо записати:

$$\frac{f(f(x+y))}{f(x)+f(y)}=\frac{x}{f(x)}.$$

В силу симетричності лівої частини маємо:

$$\frac{x}{f(x)}=\frac{y}{f(y)}.$$

Ця рівність виконується для довільних ненульових *x* та *y* (навіть для $y=-x$), тому маємо, що $f(x)=cx$ для деякої константи $c\neq 0$. Підставляючи цей вираз у вихідну рівність, одержуємо:

$$c^3(x+y)x=c(x^2+xy),$$

звідки $c=\pm 1$. Таким чином, розв'язками наведеного функціонального рівняння є три функції $f(x)\equiv 0$, $f(x)=x$ та $f(x)=-x$.

4. Обчислити суму:

$$\sum_{k=0}(-1)^k C_n^{2k}(\sin\alpha)^{2k}(\cos\alpha)^{n-2k} ,$$

де *n* – деяке натуральне число, α – довільний кут. (*Ф. Вієт*)

<u>Розв'язання</u>:

Позначимо $C_n=\sum_{k=0}(-1)^k C_n^{2k}(\sin\alpha)^{2k}(\cos\alpha)^{n-2k}$. Безпосереднім обчисленням маємо:

$C_0=1$,

$C_1=\cos\alpha$,

$C_2=(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2=\cos 2\alpha$,

$C_3=(\cos\alpha)^3-3(\sin\alpha)^2\cos\alpha=4(\cos\alpha)^3-3\cos\alpha=\cos 3\alpha$.

Отже, можна припустити, що $C_n=\cos n\alpha$. Доведемо це твердження методом математичної індукції. База індукції нами вже доведена.

Розглянемо вираз C_{n+1}:

$$C_{n+1}\overset{?}{=}\cos(n+1)\alpha=\cos(n\alpha+\alpha)=\cos n\alpha\cdot\cos\alpha-\sin n\alpha\cdot\sin\alpha .$$

Ми можемо застосувати твердження індукції для $\cos n\alpha$, однак незрозуміло, як оперувати із $\sin n\alpha$. Але, враховуючи глибинний взаємозв'язок між косинусом та синусом, можна припустити, що для $\sin n\alpha$ повинен існувати аналогічний вираз у вигляді суми із біноміальними коефіцієнтами; причому якщо косинус є парною функцією, і в C_n входять лише парні індекси, то для непарного синуса у відповідну суму повинні входити лише непарні індекси.

Отже, розглянемо суму $S_n=\sum_{k=0}(-1)^k C_n^{2k+1}(\sin\alpha)^{2k+1}(\cos\alpha)^{n-2k-1}$. Маємо:

$S_0=0$,

$S_1=\sin\alpha$,

$S_2=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$,

$S_3=3\sin\alpha(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^3=3\sin\alpha-4(\sin\alpha)^3=\sin 3\alpha$.

Отже, наша здогадка швидше за все є вірною.

Доведемо тепер методом математичної індукції подвійне твердження, що $C_n=\cos n\alpha$ і $S_n=\sin n\alpha$. Для C_{n+1} маємо:

$$\cos(n+1)\alpha=\cos n\alpha\cdot\cos\alpha-\sin n\alpha\cdot\sin\alpha=$$

$$=\cos\alpha\sum_{k=0}(-1)^k C_n^{2k}(\sin\alpha)^{2k}(\cos\alpha)^{n-2k}-\sin\alpha\sum_{k=0}(-1)^k C_n^{2k+1}(\sin\alpha)^{2k+1}(\cos\alpha)^{n-2k-1}=$$

$$=\sum_{k=0}(-1)^k C_n^{2k}(\sin\alpha)^{2k}(\cos\alpha)^{(n+1)-2k}-\sum_{k=0}(-1)^k C_n^{2k+1}(\sin\alpha)^{2k+2}(\cos\alpha)^{n-2k-1}$$

Зсунемо індекси другої суми, щоб привести у відповідність степені у обох сумах:

$$\cos(n+1)\alpha = \sum_{k=0} (-1)^k C_n^{2k} (\sin\alpha)^{2k} (\cos\alpha)^{(n+1)-2k} - \sum_{k=1} (-1)^{k-1} C_n^{2k-1} (\sin\alpha)^{2k} (\cos\alpha)^{(n+1)-2k} =$$

$$= C_n^0 (\cos\alpha)^{(n+1)} + \sum_{k=1} (-1)^k C_n^{2k} (\sin\alpha)^{2k} (\cos\alpha)^{(n+1)-2k} + \sum_{k=1} (-1)^k C_n^{2k-1} (\sin\alpha)^{2k} (\cos\alpha)^{(n+1)-2k} =$$

$$= C_n^0 (\cos\alpha)^{(n+1)} + \sum_{k=1} (-1)^k (C_n^{2k} + C_n^{2k-1}) (\sin\alpha)^{2k} (\cos\alpha)^{(n+1)-2k}.$$

Скористаймося відомою рівністю для біноміальних коефіцієнтів $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$, а також тим, що $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1$:

$$\cos(n+1)\alpha = C_{n+1}^0 (\cos\alpha)^{(n+1)} + \sum_{k=1} (-1)^k C_{n+1}^{2k} (\sin\alpha)^{2k} (\cos\alpha)^{(n+1)-2k} =$$

$$= \sum_{k=0} (-1)^k C_{n+1}^{2k} (\sin\alpha)^{2k} (\cos\alpha)^{(n+1)-2k} = C_{n+1}$$

Аналогічно розглядаються відповідні перетворення для S_{n+1}. Таким чином, твердження індукції доведено.

Зауваження. Твердження даної задачі просто доводиться за допомогою апарату комплексних чисел. Дійсно, якщо розглянути комплексне число $z = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, то за першою формулою Муавра маємо $e^{in\alpha} = (e^{i\alpha})^n$, тобто $\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$. Застосовуючи біном Ньютона до правої частини та прирівнюючи дійсні та уявні компоненти ліворуч та праворуч, одержимо відповідні вирази для $\cos n\alpha$ та $\sin n\alpha$.

5. Відновити трикутник *ABC* за вершиною *A*, точкою M_1 – серединою відрізка *BC*, та точкою K_1 – точкою дотику вписаного кола до сторони *BC*. (*О. Карлюченко*)

Розв'язання:

Перший спосіб.

Опустимо перпендикуляр з точки *A* на пряму M_1K_1, одержимо точку H_1 – основу висоти. Скористаймося формулами $M_1K_1 = \dfrac{|b-c|}{2}$ і $M_1H_1 = \dfrac{|b^2-c^2|}{2a}$, де *a*, *b*, *c* – сторони трикутника; маємо: $\dfrac{M_1H_1}{M_1K_1} = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{AI}{IL_1}$, де *I* – центр вписаного кола трикутника, L_1 – основа бісектриси кута *A*. Таким чином, якщо розділити висоту AH_1 у відомому відношенні $\dfrac{M_1H_1}{M_1K_1} = \dfrac{b+c}{a}$ и провести через точку розділу пряму *l*, паралельну M_1K_1, то точка *I* буде належати цій прямій, більш того, вона буде основою перпендикуляру, опущеного з K_1 на *l*. Звідси можемо знайти точку *I* та провести вписане коло (його радіус дорівнює $r = IK_1$). Дотичні з вершини *A* до вписаного кола перетинатимуть пряму M_1K_1 у точках *B* та *C*.

Другий спосіб.

Скористаймося тим фактом, що пряма IM_1 ділить навпіл відрізок AK_1. Нехай *E* – середина відрізка AK_1; тоді точка *I* є перетином прямої EM_1 та перпендикуляру, проведеному з точки K_1 до прямої M_1K_1. Подальша побудова не відрізняється від наведеної у першому способі.

6. На прямій, що проходить через центр кола *O*, зафіксовано точки *P* та *Q*, що не співпадають. Для довільного діаметра кола *AB* точка *X* є перетином прямих *AP* та *BQ*. Знайдіть геометричне місце точок *X*. (*Є. Діомідов, В. Калашніков*)

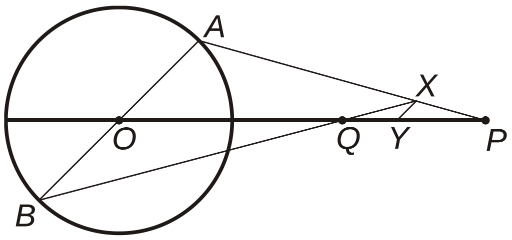
<u>*Розв'язання*</u>:

Проведемо з точки *X* пряму, паралельну *AB*, до перетину із прямою *PQ* в точці *Y*. Тоді з подібності трикутників можемо записати (тут *R* – радіус кола):

$\Delta APO \sim \Delta XPY: \ \frac{YP}{OP} = \frac{XY}{R}$;

$\Delta BQO \sim \Delta XQY: \ \frac{YQ}{OQ} = \frac{XY}{R}$;

Звідси маємо, що $\frac{YP}{YQ} = \frac{OP}{OQ} = const$, а отже, для довільної точки *X* з умови задачі точка *Y* є фіксованою точкою на прямій *PQ*. Звідси випливає також, що довжина відрізка *XY* є фіксованою (наприклад, $XY = R \cdot \frac{YP}{OP} = const$).

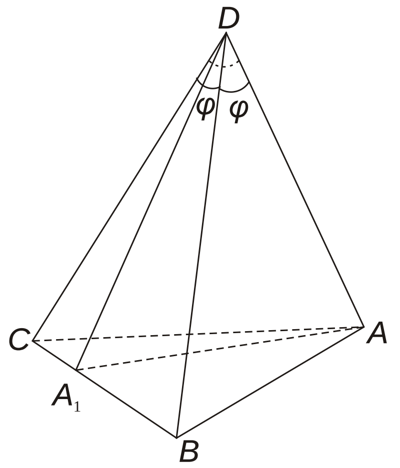


Таким чином, шукане ГМТ – це коло, проведене з точки *Y* радіуса $r = R \cdot \frac{YP}{OP}$, з якого вилучено дві точки перетину із прямою *PQ* (ці точки відповідають випадку, коли діаметр *AB* лежить на прямій *PQ*; тоді точка *X* не є однозначно визначеною).

7. У тетраедрі *ABCD* плоскі кути *ADB*, *BDC* та *CDA* рівні між собою. На сторонах *BC*, *AC* та *AB* обрано такі точки A_1, B_1 та C_1 відповідно, що трикутники DAA_1, DBB_1 та DCC_1 мають найменші можливі периметри. Доведіть, що прямі AA_1, BB_1 та CC_1 перетинаються в одній точці. (*М. Плотніков*)

<u>*Розв'язання*</u>:

Оскільки для всіх можливих точок A_1 в трикутнику ΔDAA_1 сторона *DA* залишається фіксованою, то цей трикутник матиме мінімальний периметр тоді, коли мінімальною буде сума $AA_1 + DA_1$.



Повернемо грань *DBC* навколо ребра *BC* у площину *ABC*, одержимо трикутник ΔD_1BC. Тоді $DA_1 = D_1A_1$, і можемо стверджувати, що сума $AA_1 + DA_1$ буде мінімальною лише тоді, коли точки D_1, *A* та A_1 лежать на одній прямій, тобто коли точка A_1 є перетином прямих D_1A та *BC*. Аналогічно повернувши грані *DAC* та *DAB* навколо ребер *AC* та *AB* у площину *ABC*, знайдемо точки D_2 та D_3 відповідно, і точки B_1 та C_1 так само повинні бути точками перетину прямих D_2B та *AC* і D_3C та *AB* відповідно. Отже, для доведення задачі потрібно показати, що прямі D_1A, D_2B та D_3C перетинаються в одній точці.

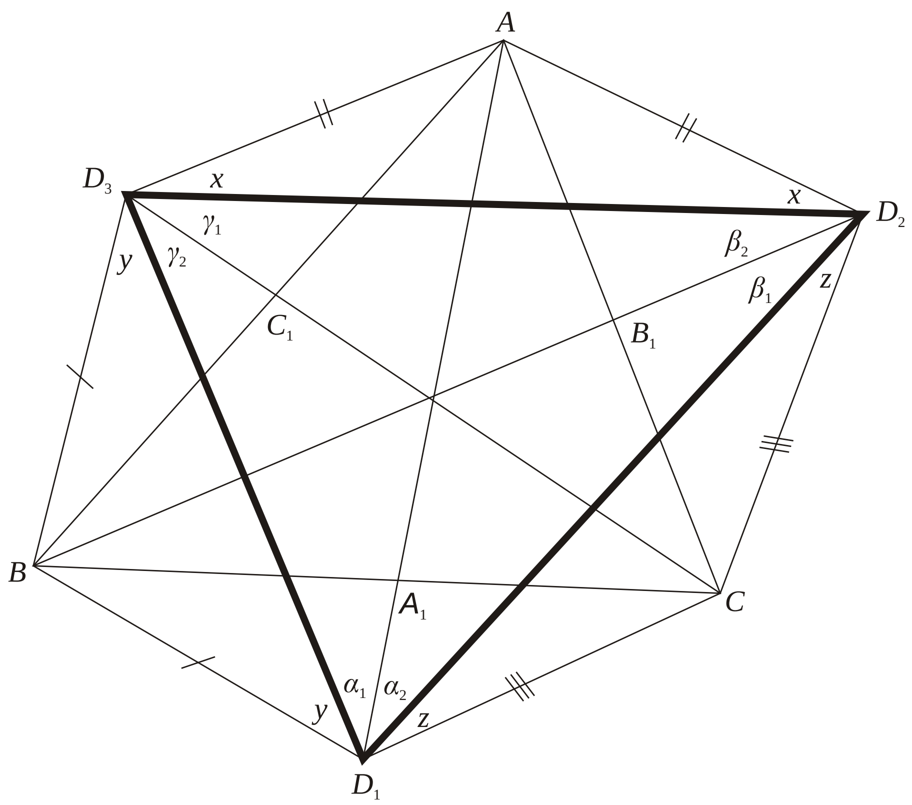
За побудовою точок D_1, D_2 та D_3 маємо $AD_2 = AD_3$, $BD_1 = BD_3$, $CD_1 = CD_2$. Введемо декілька додаткових позначень:

$\angle AD_1D_3 = \alpha_1$, $\angle AD_1D_2 = \alpha_2$, $\angle BD_2D_1 = \beta_1$, $\angle BD_2D_3 = \beta_2$, $\angle CD_3D_2 = \gamma_1$, $\angle CD_3D_1 = \gamma_2$,

$\angle AD_2D_3 = \angle AD_3D_2 = x$, $\angle BD_1D_3 = \angle BD_3D_1 = y$, $\angle CD_1D_2 = \angle CD_2D_1 = z$,

$\angle BD_1C = \angle AD_2C = \angle AD_3B = \varphi$ (рівність цих кутів випливає з умови задачі).

Нехай для визначеності точки *A*, *B* та *C* лежать поза межами трикутника $\Delta D_1D_2D_3$.



За теоремою синусів для трикутників ΔAD_1D_3 та ΔAD_1D_2 маємо:

$$\frac{AD_3}{\sin\alpha_1} = \frac{AD_1}{\sin(\varphi - y)},\ \frac{AD_2}{\sin\alpha_2} = \frac{AD_1}{\sin(\varphi - z)},$$

звідки $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin(\varphi - y)}{\sin(\varphi - z)}$. Аналогічно виводиться, що $\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{\sin(\varphi - z)}{\sin(\varphi - x)}$, $\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{\sin(\varphi - x)}{\sin(\varphi - y)}$. Отже, в трикутнику $\Delta D_1D_2D_3$ маємо

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} = \frac{\sin(\varphi - y)\sin(\varphi - z)\sin(\varphi - x)}{\sin(\varphi - z)\sin(\varphi - x)\sin(\varphi - y)} = 1,$$

а тому, за теоремою Чеви у тригонометричній формі, прямі D_1A, D_2B та D_3C перетинаються в одній точці.

У випадку, коли, наприклад, точка *A* знаходиться всередині $\Delta D_1D_2D_3$, всі наведені викладки зберігаються із заміною $\sin(\varphi - x)$ на $\sin(\varphi + x)$.

Твердження доведено.

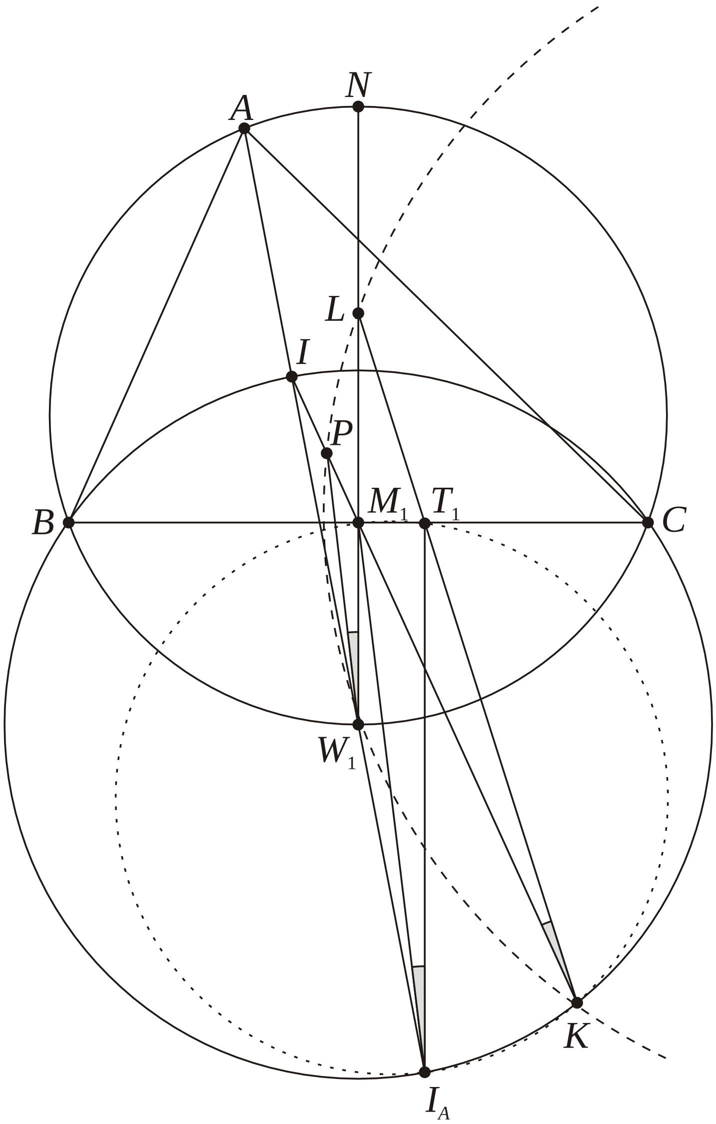
8. У трикутнику *ABC* позначимо *I* – центр вписаного кола, M_1 – середина сторони *BC*, T_1 – точка дотику зовнівписаного кола зі стороною *BC*, *N* – середина дуги *BAC* описаного кола трикутника. Пряма IM_1 вдруге перетинає коло, описане навколо трикутника *BIC*, у точці *K*. Доведіть, що пряма KT_1 ділить відрізок NM_1 навпіл. (*Д. Хілько*)

<u>*Розв'язання*</u>:

Позначимо I_a – центр зовнівписаного кола кута *A*, W_1 – точка перетину бісектриси кута *A* та описаного кола. Як відомо, точка W_1 є серединою дуги BW_1C та центром кола, описаного навколо чотирикутника $BICI_a$ (а II_a, відповідно, діаметром). Маємо:

$$\angle M_1KI_a = \angle IKI_a = 90^\circ = \angle M_1T_1I_a,$$

звідки чотирикутник $M_1T_1KI_a$ є вписаним і $\angle M_1KT_1 = \angle M_1I_aT_1$.



Нехай *P* – середина відрізка IM_1, *L* – точка перетину KT_1 та NM_1. Тоді $PW_1 \parallel M_1I_a$ та $M_1W_1 \parallel T_1I_a$, звідки $\angle PW_1M_{11} = \angle M_1KT_1$, а тому чотирикутник LPW_1K також є вписаним. Тоді

$$LM_1 \cdot M_1W_1 = PM_1 \cdot M_1K = \frac{1}{2} IM_1 \cdot M_1K .$$

Однак з кола, описаного навколо $BICI_a$, маємо $IM_1 \cdot M_1K = BM_1 \cdot CM_1$, а з описаного кола трикутника *ABC* – $BM_1 \cdot CM_1 = NM_1 \cdot M_1W_1$, звідки

$$LM_1 \cdot M_1W_1 = \frac{1}{2} NM_1 \cdot M_1W_1$$

та, остаточно, $LM_1 = \dfrac{1}{2} NM_1$, що й треба було довести.