Комбинаторика. Разное

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

Задача 1. *Дано* 2016 *чисел из отрезка* $[0; 25]$. *Докажите, что среди них найдётся два таких числа, что модуль разности их квадратных корней не больше* $\frac{1}{403}$.

Задача 2. 2016 *долларов разложили по кошелькам, а кошельки разложили по карманам. Известно, что всего кошельков больше, чем долларов в любом кармане. Докажите, что карманов больше, чем долларов в каком-нибудь кошельке.*

Задача 3. *Дано набор целых чисел* $\{a_1, \ldots, a_n\}$. *Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел (возможно одно) так, что их сумма будет делиться на* n.

Задача 4. *Доказать, что правильный треугольник нельзя покрыть двумя меньшими правильными треугольниками.*

Задача 5. *Несколько попарно непересекающихся дуг окружности покрасили в черный цвет. Оказалось, что суммарна длна этих дуг больше половины длины окружности. Доказать, что найдётся диаметр с концами в покрашенных точках.*

Задача 6. *В классе* 25 *человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее* 12 *друзей.*

Задача 7. *Квадрат разрезали восемнадцатью прямыми, из которых девять параллельны одной стороне квадрата, а девять — другой, на сто прямоугольников. Оказалось, что среди них ровно девять — квадраты. Доказать, что найдутся два квадрата равных между собой.*

Задача 8. *На плоскости расположено несколько точек, все попарные расстояния между которыми различны. Каждую из этих точек соединяют с ближайшей. Может ли при этом получиться замкнутая ломаная?*

Задача 9. *На каждой из* 15 *планет, расстояния между которыми попарно различны, находится по астроному, который наблюдает ближайшую к нему планету. Докажите, что некоторую планету никто не наблюдает.*

Задача 10. $(2n+1)$*-угольник разрезали диагоналями на* $2n-1$ *треугольник. Докажите, что среди этих треугольников как минимум* 3 *равнобедренных.*

Задача 11. *Среди чисел от* 1 *до* $2n$ *выбрали* $n+1$ *число. Докажите, что в наборе найдется пара взаимно простых чисел.*

Задача 12. *Дана таблица* $n \times n$, *в каждой её клетке записано число, причем все числа различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа.*

Задача 13. *Все клетки клетчатой плоскости окрашены в* 5 *цветов так, что в любом кресте из пяти клеточек все цвета различны. Докажите, что в любом прямоугольничке* 1×5 *все цвета различны.*