Алгебра

Сердюк Назар, nsaann@gmail.com

1. Нехай $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ – дійсні числа з сумою 1. Доведіть, що $a_1^2 + 3a_2^2 + \cdots + (2n-1)a_n^2 \leq 1$.

2. Дано дійсні числа $x_1, x_2, \cdots, x_n$ з проміжку $[0,1]$, $n \geq 2$. Доведіть, що для деякого $1 \leq i \leq n-1$ справджується нерівність: $x_i(1 - x_{i+1}) \geq \frac{1}{4}x_1(1 - x_n)$.

3. Нехай $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$, $b_1, b_2, \cdots, b_{100}$ – 200 різних дійсних чисел. Побудуємо таблицю так, щоб в клітинці, що знаходиться у i-му рядку та j-му стовпчику було записане число $a_i + b_j$. Припустимо, що добуток чисел в кожному стовпчику дорівнює 1. Доведіть, що добуток чисел в кожному рядку дорівнює -1.

4. Нехай $a_0, a_1, a_2, \cdots$ – нескінченна послідовність додатних дійсних чисел. Доведіть, що нерівність $1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}$ справджується для нескінченної кількості натуральних n.

5. Дано функцію $f : R \to R$ таку, що $|f(x)| \leq 1$, $f(x + \frac{13}{42}) + f(x) = f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7})$ для будь-якого дійсного x. Доведіть, що функція f періодична.

6. Нехай $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ – додатні дійсні числа такі, що $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = n$. Відомо, що $a_1 + \cdots + a_n = mn$. Доведіть, що якщо $a_i \leq m$ для $1 \leq i \leq n$, то $n - i \geq n(m - a_i)^2$.

7. Нехай $a_1, a_2, a_3, \cdots$ – нескічення послідовність дійсних чисел з відрізка $[0, c]$ для деякого дійсного $c > 0$. Відомо, що $|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i+j}$ для усіх $i \neq j$. Доведіть, що $c \geq 1$.

8. Нехай $x_1, x_2, \cdots, x_n$ – довільні дійсні числа. Доведіть нерівність:
$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

9. Дано дійсне число $a > 1$, побудуйте нескінченну обмежену послідовність дійсних чисел $\{x_n\}$ таку, що $|x_i - x_j||i - j|^a \geq 1$ для будь-яких $i \neq j$.

10. Дано дійсні числа $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$ такі, що $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Нехай m – натуральне число, причому $x_1 + \cdots + x_n \leq m \leq n$. Доведіть, що $x_1 + \cdots + x_m \geq 1$.

11. Дано дійсні числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $n > 1$. Доведіть, що існують дійсні числа $b_1, b_2, \cdots, b_n$, що задовольняють наступні умови:
    а). $a_i - b_i$ – ціле число для $1 \leq i \leq n$;
    б). $\sum_{1 \leq i < j \leq n}(b_i - b_j)^2 \leq \frac{n^2-1}{12}$.

12. Нехай $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ – множина натуральних чисел така, що усі підмножини A мають різну суму елементів. Доведіть, що $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2$.

13. Дано дійсні числа $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ такі, що $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = b_1^2 + \cdots + b_n^2 = 1$, $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = 0$. Доведіть, що $(a_1 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + \cdots + b_n)^2 \leq n$.

14. Нехай $n > 1$ – натуральне число. Доведіть, що існує підмножина A множини $\{1, 2, \cdots, n\}$ така, що
    а). $|A| \leq 2[\sqrt{n}] + 1$;
    б). $\{|x - y| : x, y \in A, x \neq y\} = \{1, 2, \cdots, n-1\}$.

15. Нехай n – натуральне число і $(x_1, \cdots, x_n)$, $(y_1, \cdots, y_n)$ – дві послідовності додатних дійсних чисел. Припустимо, що $(z_2, z_3, \cdots, z_{2n})$ – це послідовність додатних дійсних чисел для якої $z_{i+j}^2 \geq x_iy_j$ для усіх $1 \leq i, j \leq n$, $M = \max\{z_2, \cdots, z_{2n}\}$. Доведіть, що
$$\left(\frac{M + z_2 + \cdots + z_{2n}}{2n}\right)^2 \geq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}\right).$$