Неравенства - 2

Тут и далее все числа действительные и положительные, если не сказано обратного.

1. Пускай $n > 1$ и A — помножество действительных чисел менее чем с n элементами. Известно, что все числа $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$ можно предстваить в виде суммы разных элементов из A. Докажите, что в множестве A есть отрицательное число.

2. Даны числа $x_1, \ldots, x_n$ такие, что
$$x_1 + \cdots + x_n = \frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2}.$$
Докажите, что для любого $1 \leq i \leq n$ среди этих чисел можно выбрать i штук с суммой не меньше i.

3. Докажите неравенство:
$$\frac{(ab+bc+ac)(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{9}{8}.$$

4. Докажите неравенство:
$$\frac{1}{b(a+b} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

5. Докажите неравенство:
$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

6. Пускай $f(x)$ — многочлен с неотрицательными коэффициентами. Докажите неравенство
$$f(xy) \leq f(x^2)f(y^2).$$

7. Докажите неравенство
$$a\sqrt{a^2+c^2} + b\sqrt{b^2+c^2} \leq a^2+b^2+c^2.$$

8. Известно, что $x^2+y^2+z^2 \leq 3$. Докажите, что
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x+y+z.$$

9. Докажите неравенство
$$\frac{x}{x+ky+kz} + \frac{y}{y+kx+kz} + \frac{z}{z+kx+ky} \geq \frac{3}{2k+1}.$$

10. Докажите неравенство
$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

11. Известно, что $abc = 1$. Докажите неравенство
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

12. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(a+c)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{abc}.$$

13. Известно, что $a+b+c \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Докажите неравенство

$$a+b+c \geq \frac{3}{abc}.$$

14. Известно, что $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{x+xz}+\sqrt{z+yx} \geq \sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

15. Докажите неравенство:

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ac}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c} \geq \frac{3bc+ac-ab}{2ab+ac}+\frac{3ac+ba-bc}{2cb+ba}+\frac{3ba+bc-ac}{2ac+bc}.$$

16. Докажите неравенство

$$min(\sqrt{x+xyz}, \sqrt{y+xyz}, \sqrt{z+xyz}) \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

17. При $a, b, c \geq 1$ докажите неравенство

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}.$$

18. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c},$$

при условии, что $a+b+c=1$.

19. Известно, что $0<x, y, z<1$ и $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Докажите, что хотя бы одно чисел $(1-x)y, (1-y)z, (1-z)x$ не меньше, чем $\frac{1}{4}$.

20. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

21. Докажите неравенство:

$$\left(\frac{a+2b}{a+2c}\right)^3+\left(\frac{b+2c}{b+2a}\right)^3+\left(\frac{c+2a}{c+2b}\right)^3 \geq 3$$

22. Докажите неравенсво:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{3}{2}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right).$$

23. Докажите неравенсво:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

24. Докажите неравенство

$$\sum_{cyc} \sqrt[3]{4a^3+4b^3} \leq \sum_{cyc} \frac{4a^2}{a+b}.$$