IX Київський відкритий турнір математичних боїв ім. Лесі Рубльової

Другий тур

Умови задач

Молодша ліга. Група «А»

1. Скільки чотирицифрових чисел $\overline{abcd}$ задовольняють водночас умови $a+b=c+d$ та $a^2+b^2=c^2+d^2$?

2. Нехай *a*, *b* та *c* — попарно різні натуральні числа. Доведіть, що число $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc$ має принаймні 8 різних натуральних дільників.

3. У трикутнику *ABC* медіана *CM* дорівнює довжині сторони *AB*. На променях *CA* та *MB* вибрано відповідно такі точки *D* та *E*, що $AD=AC$, а $BE=BM$. Доведіть, що прямі *DM* і *CE* перпендикулярні.

4. Прямокутники *ABCD* та *KLMN* розташовані, як показано на рис. 1. Чому дорівнює сума кутів *MPC* та *MQD*?

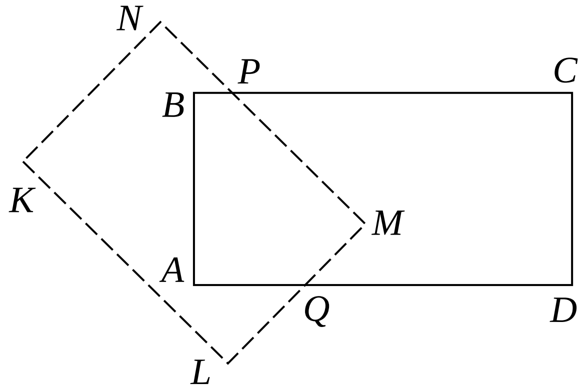

Рис. 1

5. Знайдіть усі трійки попарно різних натуральних чисел *x*, *y*, *z*, що задовольняють рівність $3^x+3^y+3^z=21897$.

6. Доведіть, що серед будь-яких 16 складених чисел, менших за 2500, обов'язково знайдуться два, що мають більший від одиниці спільний дільник.

7. Скільки є чотирицифрових чисел, що містять дві різні парні й дві різні непарні цифри?

8. У класі вчаться 14 дівчат. Кожну дівчину спитали, скільки її однокласниць мають таке ж ім'я, як вона, а також скільки її однокласниць мають таке ж прізвище, як вона. Серед відповідей трапилися всі числа від 0 до 6. Доведіть, що деякі дві учениці мають однакові імена та прізвища.

Молодша ліга. Група «Б»

1. *Задача № 1 групи «А» молодшої ліги.*
2. *Задача № 2 групи «А» молодшої ліги.*
3. На дідусевій дачі ростуть 4 груші, висаджені уздовж прямої лінії, а також кілька яблунь. Відомо, що кожна яблуня розташована на відстані 10 м рівно від двох груш, а на відстані 10 м від кожної груші є принаймні одна яблуня. Скільки яблунь може рости на дідусевій дачі?
4. *Задача № 4 групи «А» молодшої ліги.*
5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*
6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*
7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*
8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Молодша ліга. Сьомі класи

1. Знайдіть усі натуральні числа *n*, для яких кожне з трьох чисел $3n-4$, $4n-5$ та $5n-3$ є простим.

2. Чи можна подати число 100 000 000 як добуток двох натуральних чисел, що не містять нулів?
3. *Задача № 3 групи «Б» молодшої ліги.*
4. *Задача № 4 групи «А» молодшої ліги.*
5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*
6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*
7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*
8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Середня ліга. Група «А»

1. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність
$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geqslant a+b+c.$$
2. Знайдіть усі кубічні многочлени $f(x)$, що задовольняють умову
$$f(x^2-2)=-f(x)f(-x).$$
3. У вписаному чотирикутнику одна з діагоналей дорівнює 10, а кожна з чотирьох сторін має довжину 6 або 8. Знайдіть радіус описаного навколо чотирикутника кола.
4. Нехай D — внутрішня точка сторони BC трикутника ABC, а точка E — середина відрізка CD. Перпендикуляр до BC, що проходить через E, перетинає сторону AC в точці F, причому $AF\cdot BC=AC\cdot EC$. Через точку G на стороні AB трикутника проходить коло, описане навколо ΔACD. Доведіть, що дотична до описаного навколо ΔAFG кола, проведена з точки F, дотикається також і до кола, описаного навколо ΔBEG.
5. Нехай m та n — деякі натуральні числа, а p та q — різні прості числа такі, що значення виразу $\frac{mp-1}{q}+\frac{nq-1}{p}$ є цілим. Доведіть, що $\frac{m}{q}+\frac{n}{p}>1$.
6. Доведіть, що коли натуральні числа a та b взаємно прості, то й числа $ab(a+b)$ і a^3+ab+b^3 також взаємно прості.
7. Числа 1, 2, 3, …, $4n^2$ деяким чином розставлено в комірках таблиці $2n\times 2n$, $n\geqslant 3$, причому всі числа трапляються в таблиці рівно по разу. Назвімо рядок таблиці ординарним, якщо кожен його елемент є меншим від суми інших $2n-1$ числа, які містяться в цьому рядку. Доведіть, що в таблиці є принаймні $n+1$ ординарний рядок.
8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Середня ліга. Група «Б»

1. *Задача № 1 групи «А» середньої ліги.*
2. *Задача № 2 групи «А» середньої ліги.*
3. Задано трикутник ABC. Відомо, що бісектриса кута BAC, висота трикутника, проведена з вершини C, та серединний перпендикуляр до сторони AC трикутника перетинаються в одній точці. Знайдіть величину кута BAC.
4. Нехай I — центр вписаного кола, а I_A — центр зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони BC трикутника ABC. Доведіть, що $AI\cdot AI_A=AB\cdot AC$.
5. *Задача № 5 групи «А» середньої ліги.*
6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*
8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Старша ліга. Група «А»

1. Для додатних чисел x_1, x_2, …, x_n, y_1, y_2, …, y_n, $n \in \mathbb{N}$, справджується нерівність $x_1 + x_2 + ... + x_n \geqslant x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$. Доведіть, що справедливою є тоді й нерівність $x_1 + x_2 + ... + x_n \leqslant \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + ... + \frac{x_n}{y_n}$.

2. Послідовність (x_n), $n \geqslant 0$, задано таким чином: x_0 та x_1 — деякі додатні числа, а для кожного $n \geqslant 2$ $x_n = \frac{4\max\{x_{n-1}, 4\}}{x_{n-2}}$. Доведіть, що $x_{2012}^2 = x_{37} \cdot x_{152}$.

3. Нехай F, F_A, F_B та F_C — точки Фейєрбаха нерівностороннього трикутника ABC, а точка I — його інцентр. Доведіть, що прямі AF_A, BF_B, CF_C та IF проходять через одну точку.
Точки Фейєрбаха — це місця дотику кола дев'яти точок до вписаного (дотик внутрішнім чином) і трьох зовнівписаних (дотик зовнішнім чином) кіл трикутника: F — точка дотику до вписаного кола, F_A — точка дотику до зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони BC, F_B — точка дотику до позавписаного кола, що дотикається до AC, F_C — точка дотику до зовнівписаного кола, яке дотикається до AB.
Коло дев'яти точок — це коло, що проходить через середини сторін трикутника.
4. *Задача № 4 групи «А» середньої ліги.*
5. *Задача № 5 групи «А» середньої ліги.*
6. *Задача № 6 групи «А» середньої ліги.*
7. Нехай A_1, A_2, …, A_k — деякі k підмножин множини $\{1, 2, ..., n\}$. Відомо, що для довільних i та j, $1 \leqslant i < j \leqslant k$, з чотирьох множин $A_i \cap A_j$, $A_i \cap A_j^{\complement}$, $A_i^{\complement} \cap A_j$ та $A_i^{\complement} \cap A_j^{\complement}$ порожньою є рівно одна (через $A^{\complement}$ позначене доповнення множини A, тобто різниця множин $\{1, 2, ..., n\} \setminus A$). Для кожного $n \geqslant 2$ знайдіть найбільше можливе значення k.
8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Старша ліга. Група «Б»

1. *Задача № 1 групи «А» старшої ліги.*
2. Знайдіть усі такі многочлени вигляду $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $n \geqslant 2$, усі коефіцієнти яких ненульові, що вираз $P(x) - P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot ... \cdot P_{n-1}(x)$ є сталою величиною, де $P_1(x) = a_1 x + a_0$, $P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, …, $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.
3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*
4. *Задача № 4 групи «А» середньої ліги.*
5. *Задача № 5 групи «А» середньої ліги.*
6. Знайдіть усі пари цілих чисел a та b, які задовольняють рівність

$$7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2.$$

7. *Задача № 7 групи «А» середньої ліги.*
8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Старша ліга. Група «В»

1. *Задача № 1 групи «А» середньої ліги.*
2. *Задача № 2 групи «Б» старшої ліги.*
3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*
4. *Задача № 4 групи «Б» середньої ліги.*
5. *Задача № 5 групи «А» середньої ліги.*
6. *Задача № 6 групи «Б» старшої ліги.*
7. *Задача № 7 групи «А» середньої ліги.*
8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Відповіді та розв’язання

Молодша ліга. Група «А»

1. ***Відповідь:*** 171.

Розв’язання. З умови задачі маємо рівності

$$a^2+b^2=c^2+d^2,\ a+b=c+d \ \Rightarrow\ a^2+2ab+b^2=c^2+2cd+d^2 \ \Rightarrow\ ab=cd \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2-2ab+b^2=c^2-2cd+d^2 \ \Rightarrow\ (a-b)^2=(c-d)^2 \ \Rightarrow\ |a-b|=|c-d|.$$

Тоді чи $a-b=c-d$, чи $a-b=d-c$. У системі з рівнянням $a+b=c+d$ перший варіант дає $a=c$, $b=d$, а другий — $a=d$, $b=c$. У той же час зрозуміло, що довільне число $\overline{abcd}$, у якого $a=c$ й $b=d$ або $a=d$ й $b=c$, справді задовольняє умову задачі. Тож залишилось підрахувати кількість таких чисел.

Замість a можна підставити довільну ненульову цифру (9 варіантів), замість b — довільну цифру (10 варіантів), далі маємо два способи вибору c й d ($c=a$, $d=b$ або навпаки). При цьому ті числа, у яких $a=b=c=d$ (а таких чисел 9), ми порахували два рази. Тому всього умову задовольняє $9\cdot 10\cdot 2-9=171$ число.

2. ***Розв’язання.*** Перепишімо заданий вираз таким чином:

$$(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc=$$

$$=ab(a+b)+c^2(b+a)+c(b^2+a^2+2ab)=(a+b)(ab+c^2+c(a+b))=(a+b)(b+c)(c+a).$$

Множники $a+b$, $b+c$ й $c+a$ є трьома попарно різними натуральними числами, більшими за 1. Випишімо такі вісім дільників числа $(a+b)(b+c)(c+a)$:

$$1,\ a+b,\ b+c,\ c+a,\ (a+b)(b+c),\ (b+c)(c+a),\ (c+a)(a+b),\ (a+b)(b+c)(c+a).$$

Число 1 є найменшим, а число $(a+b)(b+c)(c+a)$ найбільшим з усіх виписаних дільників. Крім того, трійка $(a+b)(b+c)$, $(b+c)(c+a)$, $(c+a)(a+b)$ (як і трійка $a+b$, $b+c$, $c+a$) містить три різних числа. Зрозуміло, що $(a+b)(b+c)\ne a+b$, $(a+b)(b+c)\ne b+c$, $(b+c)(c+a)\ne b+c$ і т. д. Нарешті, $(a+b)(b+c)\geqslant(a+1)(1+c)=c+a+ac+1>c+a$, тому $(a+b)(b+c)\ne c+a$ і — аналогічно — $(b+c)(c+a)\ne a+b$ та $(c+a)(a+b)\ne b+c$. Отже, всі вісім дільників різні.

3. ***Розв’язання.*** Позначимо довжину відрізків $AM=BM=BE$ через a (рис. 2). Нехай K — така точка на промені MA, що $AK=a$. Тоді $KM=ME=AB=CM=2a$. Це означає, що в трикутнику KCE медіана CM дорівнює половині сторони, до якої проведена, тобто цей трикутник прямокутний, а $KC\perp CE$. До того ж $KCMD$ — паралелограм, бо обидві його діагоналі діляться точкою перетину навпіл; звідси $DM\parallel KC$. Тому $DM\perp CE$.

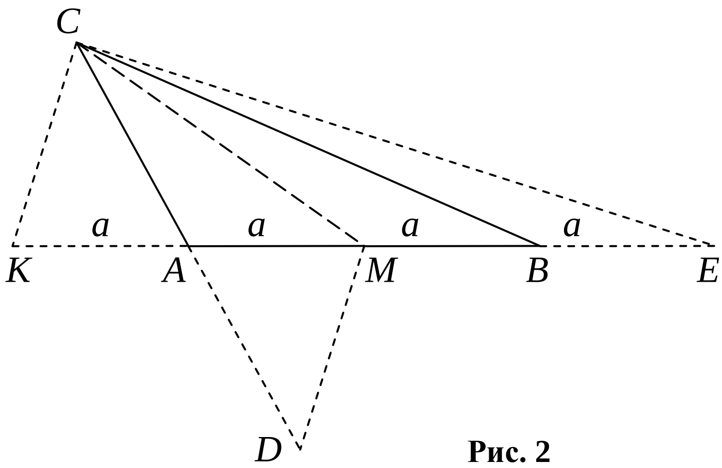

Рис. 2

4. ***Відповідь:*** 90°.

Розв’язання. Проведімо з точки M промінь MR, як показано на рис. 3. Оскільки при перетині двох паралельних прямих січною утворюються рівні внутрішні різносторонні кути, маємо

$$\angle MPC=\angle PMR \text{ та } \angle MQD=\angle QMR \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \angle MPC+\angle MQD=\angle PMR+\angle QMR=\angle PMQ=90^\circ.$$

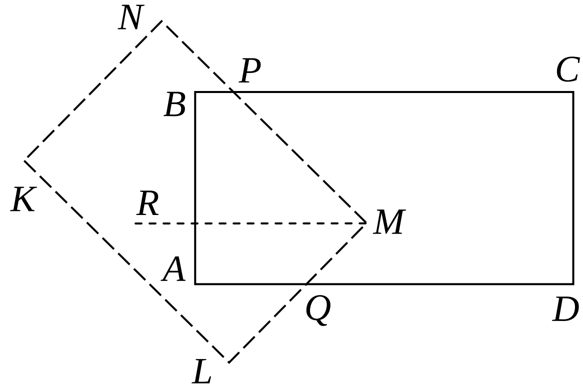

Рис. 3

5. ***Відповідь:*** усі перестановки чисел 3, 7 та 9.

Розв’язання. Без обмеження загальності будемо вважати, що $x<y<z$. Задану в умові задачі рівність можна переписати як $3^x(1+3^{y-x}+3^{z-x})=3^3\cdot 811$. Ура-

ховуючи, що числа $1+3^{y-x}+3^{z-x}$ та 811 не діляться на 3, маємо: $x=3$, а $3^{y-x}+3^{z-x}=810$. Останню рівність перепишімо як $3^{y-x}(1+3^{z-y})=3^4\cdot 10$, звідки $y-x=4$, а $3^{z-y}=9 \Leftrightarrow z-y=2$. Таким чином, $y=7$ і $z=9$, а умову задачі задовольняють усі трійки, що є перестановками чисел 3, 7, 9, і лише вони.

6. ***<u>Розв'язання</u>.*** Розгляньмо довільне складене число *n*, менше за 2500, та його найменший (крім одиниці) дільник *d*. Число *d* просте, бо інакше його можна розкласти на добуток менших чисел, кожне з яких також буде дільником *n*. Припустимо, що $d>50$. Тоді $n/d<2500/d<50<d$. При цьому число n/d також є дільником *n*, відмінним від одиниці, що дає суперечність. Отже, кожне складене число, менше за 2500, має простий дільник, що не перевищує 50.
Випишімо всі прості числа, які не перевищують 50:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Виписаних чисел 15, тож за принципом Діріхле із довільних 16 складених чисел, менших за 2500, принаймні два діляться на одне й те саме просте число з цього списку.

7. ***<u>Відповідь:</u>*** 2160.

<u>Розв'язання</u>. Як дві різні парні, так і дві різні непарні цифри можна вибрати у $C_5^2=\dfrac{5\cdot 4}{2}=10$ способів. Далі з'являються $4!=24$ варіанти порядку розстановки чотирьох вибраних цифр. Усього $10\cdot 10\cdot 24=2400$ варіантів чисел, серед яких чотирицифровими не будуть лише ті, на першому місці у яких стоїть цифра 0. Оскільки проведені міркування симетричні відносно кожної з 10 цифр, цифра 0 стоїть на першому місці рівно у $2400/10=240$ випадках. Таким чином, умову задачі задовольняють $2400-240=2160$ чотирицифрових чисел.

8. ***<u>Розв'язання</u>.*** Розділимо всіх дівчат на групи у два різних способи: спершу зберемо в групи дівчат з однаковими іменами, а потім розформуємо ці групи й зберемо в нові групи дівчат з однаковими прізвищами. З умови задачі випливає, що утвориться хоча б одна група (або першого, або другого типу) тільки з однією дівчиною в ній, а також хоча б одна група рівно з 2 дівчатами, хоча б одна група з 3 дівчатами, …, принаймні одна група рівно з 7 ученицями. Загалом у цих групах $1+2+...+7=28$ дівчат. Але кожну з 14 учениць ми могли порахувати щонайбільше двічі (у складі групи першого типу та в складі групи другого типу), а $14\cdot 2=28$ — тому інших груп, ніж ті сім, які ми розглядаємо, немає.
Розгляньмо тепер групу, до якої входить 7 дівчат. Усі вони мають однакові імена або однакові прізвища. Припустімо без утрати загальності, що вони мають однакові імена. Крім даної групи, є лише 6 інших груп, тому серед прізвищ дівчат є щонайбільше 6 різних. А тоді за принципом Діріхле із 7 дівчат з однаковими іменами хоча б дві матимуть також і спільне прізвище.

<u>Молодша ліга. Група «Б»</u>

1. *Задача № 1 групи «А» молодшої ліги.*

2. *Задача № 2 групи «А» молодшої ліги.*

3. ***<u>Відповідь:</u>*** від 2 до 12.
<u>Розв'язання</u>. Оскільки на відстані 10 м від кожної з чотирьох груш має рости хоча б одна яблуня, причому одна й та сама яблуня може рости на відстані 10 м тільки від двох груш, на дачі повинно рости хоча б $4/2=2$ яблуні.

У той же час на відстані 10 м від двох фіксованих груш може рости тільки дві яблуні, симетричні відносно лінії, яка проходить через точки, де ростуть груші. Оскільки пар груш усього $C_4^2=\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$, яблунь не більше за $2\cdot 6=12$.

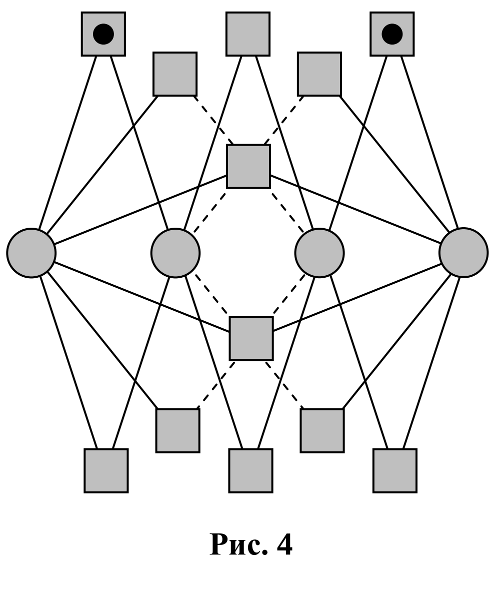

Рис. 4

На рис. 4 зображено можливе розташування груш (сірі круги): відстань між кожними двома сусідніми грушами однакова й така, що відстань між крайніми грушами менша за 20 м. Для кожної пари груш на рисунку наявні дві яблуні (сірі квадрати), такі що відстані від них до обох груш дорівнюють по 10 м. Усього на рисунку 12 яблунь, і розташування дерев задовольняє умову задачі. Якщо прибрати будь-які яблуні, крім двох, що позначені жирними точками, можна дістати довільну кількість яблунь від 2 до 11, причому для кожної груші досі знайдеться яблуня, що росте на відстані 10 м від неї.

4. *Задача № 4 групи «А» молодшої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Молодша ліга. Сьомі класи

1. ***Відповідь:*** $n = 2$.
Розв'язання. Якщо n непарне, число $5n - 3$ парне. Єдиним парним простим числом є 2, тому повинна справджуватися рівність $5n - 3 = 2$. Але тоді $n = 1$, а $3n - 4 = -1$. Оскільки число -1 не є простим, непарні значення n умову не задовольняють.
Якщо ж n парне, парним буде й число $3n - 4$. Тому $3n - 4 = 2$, звідки $n = 2$, і значення $4n - 5 = 3$ й $5n - 3 = 7$ також є простими числами. Отже, умову задовольняє тільки $n = 2$.

2. ***Відповідь:*** не можна.
Розв'язання. Оскільки $100\,000\,000 = 10^8 = 2^8 \cdot 5^8$, кожен дільник цього числа, відмінний від одиниці, ділиться на 2 або на 5. Якщо певне число ділиться і на 2, і на 5, воно ділиться й на 10, тож містить нуль. Це значить, що якщо 100 000 000 вдалося подати як добуток двох натуральних чисел без нулів, то один із множників не ділиться на 2, а інший не ділиться на 5, тобто перший із них дорівнює 5^8, а другий — 2^8. Але число $5^8 = 390\,625$ також містить нуль, отже, задовольнити умову задачі неможливо.

3. *Задача № 3 групи «Б» молодшої ліги.*

4. *Задача № 4 групи «А» молодшої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Середня ліга. Група «А»

1. ***Розв'язання.*** Скористаймося нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним трьох чисел:

$$\frac{a^3}{bc} + b + c \geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}\cdot b\cdot c} = 3a,\ \frac{b^3}{ca} + c + a \geqslant 3b,\ \frac{c^3}{ab} + a + b \geqslant 3c \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + 2a + 2b + 2c = \left(\frac{a^3}{bc} + b + c\right) + \left(\frac{b^3}{ca} + c + a\right) + \left(\frac{c^3}{ab} + a + b\right) \geqslant 3a + 3b + 3c.$$

Звідси й випливає потрібна нерівність.

2. ***Відповідь:*** $x^3 - 3x + 1$, $x^3 - 3x - 2$, $x^3 + x^2 - 2x - 1$, $x^3 + 2x^2 - 1$, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $x^3 - x^2 - 3x + 2$, $x^3 - 3x^2 + 4$, $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

Розв'язання. З умови задачі зрозуміло, що старший коефіцієнт многочлена дорівнює 1, адже якщо $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, то коефіцієнт біля x^6 у лівій частині рівності $f(x^2-2) = -f(x)f(-x)$ дорівнює a, а в правій — a^2. Тоді $a = a^2$ — і, враховуючи, що $a \neq 0$, $a = 1$.
Таким чином, $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, де b, c, d — певні дійсні числа, — загальний вигляд шуканого многочлена. Перепишімо умову задачі відповідним чином:

$$(x^2-2)^3 + b(x^2-2)^2 + c(x^2-2) + d = -(x^3+bx^2+cx+d)(-x^3+bx^2-cx+d) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2)^2(x^2-2+b) + c(x^2-2) + d = (x^3+cx+(bx^2+d))(x^3+cx-(bx^2+d)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^4-4x^2+4)(x^2-2+b) + cx^2 - 2c + d = (x^3+cx)^2 - (bx^2+d)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^6-2x^4+bx^4) + (-4x^4+8x^2-4bx^2) + (4x^2-8+4b) + cx^2 - 2c + d =$$
$$= x^6 + 2cx^4 + c^2x^2 - b^2x^4 - 2bdx^2 - d^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^6 + x^4(-2+b-4) + x^2(8-4b+4+c) + (-8+4b-2c+d) = x^6 + x^4(2c-b^2) + x^2(c^2-2bd) + (-d^2).$$

Рівність є справедливою тоді й лише тоді, коли коефіцієнти біля відповідних степенів змінної x однакові:

$$\begin{cases} -6+b = 2c-b^2, \\ 12-4b+c = c^2-2bd, \\ -8+4b-2c+d = -d^2. \end{cases}$$

Лишається розв'язати систему. Розглянемо спершу випадок, коли $b = 0$. У цьому разі систему можна переписати так:

$$\begin{cases} -6 = 2c, \\ 12+c = c^2, \\ -8-2c+d = -d^2. \end{cases}$$

Із перших двох рівнянь $c = -3$. Підставивши в третє рівняння, маємо $d^2 + d - 2 = 0$, тобто $d = 1$ або $d = -2$. Відповідні многочлени дорівнюють $f(x) = x^3 - 3x + 1$ та $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

Хай тепер $b \neq 0$. Тоді з першого рівняння системи $c = \dfrac{b^2+b}{2} - 3$, а з другого рівняння

$$d = \frac{c^2-c+4b-12}{2b} = \frac{((b^2+b)/2-3)^2 - ((b^2+b)/2-3) + 4b - 12}{2b} =$$
$$= \frac{((b^2+b)^2/4 - 3(b^2+b) + 9) - (b^2+b)/2 + 4b - 9}{2b} = \frac{(b^4+2b^3+b^2)/4 - 3(b^2+b) - (b^2+b)/2 + 4b}{2b} =$$
$$= \frac{(b^4+2b^3+b^2) - 12(b^2+b) - 2(b^2+b) + 16b}{8b} = \frac{b^4+2b^3-13b^2+2b}{8b} = \frac{b^3+2b^2-13b+2}{8}.$$

До того ж рівності $c = \dfrac{b^2+b}{2} - 3$ і $d = \dfrac{b^3+2b^2-13b+2}{8}$ рівносильні першим двом рівнянням системи. Підставмо їх у третє рівняння:

$$-8+4b-2c+d = -d^2 \Leftrightarrow -8+4b-2\left(\frac{b^2+b}{2}-3\right) + \frac{b^3+2b^2-13b+2}{8} = -\left(\frac{b^3+2b^2-13b+2}{8}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 64(-8+4b-(b^2+b)+6) + 8(b^3+2b^2-13b+2) = -(b^3+2b^2-13b+2)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 64(-2+3b-b^2) + (b^3+2b^2-13b+2)(b^3+2b^2-13b+10) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-128+192b-64b^2) + (b^6+2b^5-13b^4+10b^3) + (2b^5+4b^4-26b^3+20b^2) +$$
$$+(-13b^4-26b^3+169b^2-130b) + (2b^3+4b^2-26b+20) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b^6 + b^5(2+2) + b^4(-13+4-13) + b^3(10-26-26+2) +$$
$$+b^2(-64+20+169+4) + b(192-130-26) + (-128+20) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b^6 + 4b^5 - 22b^4 - 40b^3 + 129b^2 + 36b - 108 = 0.$$

Шляхом підбору та послідовного скорочення можна знайти всі 6 коренів цього рівняння: 1, 2, 3, -1, -3 та -6. Обчисливши для кожного з коренів значення коефіцієнтів c й d, матимемо відповідні многочлени $f(x)$: x^3+x^2-2x-1, x^3+2x^2-1, x^3+3x^2+3x+1, x^3-x^2-3x+2, x^3-3x^2+4 та $x^3-6x^2+12x-8$.

3. ***Відповідь:*** 5.

Розв'язання. Якщо всі сторони вписаного чотирикутника рівні, він є квадратом. Але діагональ квадрата з довжиною сторони 6 або 8 не дорівнює 10. Значить, не всі сторони чотирикутника, про який ідеться в умові задачі, однакові.

Розглянемо ту діагональ чотирикутника, що має довжину 10. Якщо хоча б по один бік від неї є по одній стороні кожної довжини, то кут, який утворюють ці сторони, прямий (бо $6^2+8^2=10^2$). У такому випадку діагональ є діаметром описаного кола, а коло, відповідно, має радіус 5.

Нехай тепер з одного боку від діагоналі $AC=10$ обидві сторони мають довжину 6, а з іншого боку — довжину 8 (рис. 5). Неважко зрозуміти, що трикутники *BAD* й *BCD* рівні за трьома сторонами. Звідси $\angle BAD=\angle BCD$. Чотирикутник є вписаним, тож сума цих кутів дорівнює $180°$, тобто кожен із них є прямим. Це означає, що діагональ *BD* є діаметром кола і дорівнює $\sqrt{6^2+8^2}=10$. Отже, радіус кола і в цьому випадку дорівнює 5.

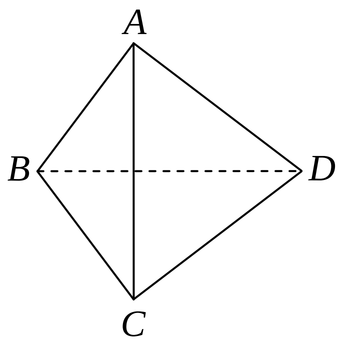

Рис. 5

Зауважимо, що насправді останній розглянутий випадок приводить до суперечності, бо відрізок *AC* також має довжину 10, тобто є діаметром описаного кола, але в той же час він не проходить через центр кола — середину діаметра *BD*.

4. ***Розв'язання.*** Доведемо, що пряма *EF* — спільна дотична до кіл, описаних навколо ΔAFG та ΔBEG. Для цього достатньо показати, що $\angle GAF=\angle GFE$, а $\angle GBE=\angle GEF$ (рис. 6).

Хай *H* — точка перетину зі стороною *AB* прямої, що проходить через *F* паралельно до *BC*. Із подібності $\Delta AHF \sim \Delta ABC$ маємо $\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{HF}{BC}$. В умові ж задачі задано рівність, з якої безпосередньо випливає співвідношення $\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{EC}{BC}$. Тому $HF=EC=ED$, що означає, що *HFCE* — паралелограм, а *HFED* — прямокутник.

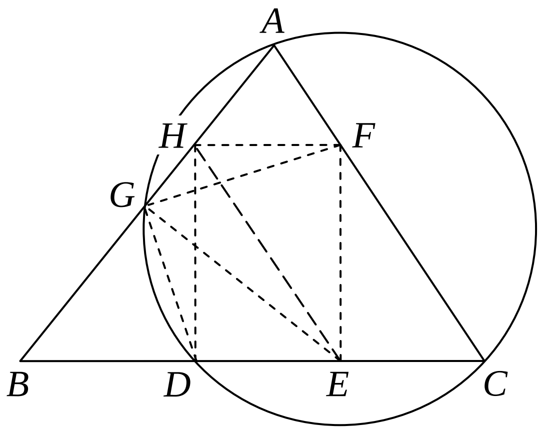

Рис. 6

Оскільки *ACDG* за умовою вписаний, а $FC \parallel HE$, то $\angle BGD=180°-\angle AGD=\angle ACD=\angle HED$. Тому (незалежно від порядку розташування точок *G* та *H* на стороні трикутника) *D, E, G, H* лежать на одному колі. Кути *HDE* та *HFE* прямі, тож це коло має діаметр *HE* і містить точку *F*. А тоді $\angle GAF=\angle GAC=180°-\angle GDC=180°-\angle GDE=\angle GFE$.

Якщо $G\neq H$, то $\angle HGE=90°$, звідки, незалежно від розташування, $\angle BGE=90°$. Якщо $G=H$, також $\angle BGE=\angle BGD+\angle DGE=\angle HED+\angle DHE=90°$. Отже, $\angle GBE=90°-\angle GEB=\angle GEF$.

Обидві рівності $\angle GAF=\angle GFE$ та $\angle GBE=\angle GEF$ доведено.

5. ***Розв'язання.*** Зведемо суму дробів до спільного знаменника:

$$\frac{mp-1}{q}+\frac{nq-1}{p}=\frac{p(mp-1)+q(nq-1)}{pq}.$$

За умовою це число ціле, тобто $p(mp-1)+q(nq-1) \,\vdots\, pq \Rightarrow p(mp-1)+q(nq-1) \,\vdots\, p$. Перший доданок, очевидно, кратний *p*, тому ділитися на *p* має також і доданок $q(nq-1)$. Числа *p* та *q* взаємно прості, бо різні, тому $nq-1 \,\vdots\, p$. Аналогічно можна показати, що $mp-1 \,\vdots\, q$. Тоді

$$(nq-1)(mp-1) \,\vdots\, pq \Rightarrow mnpq-(mp+nq-1) \,\vdots\, pq \Rightarrow mp+nq-1 \,\vdots\, pq \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mp+nq>pq \Rightarrow \frac{m}{q}+\frac{n}{p}>1.$$

6. ***Розв'язання.*** Припустімо, числа $ab(a+b)$ і a^3+ab+b^3 не є взаємно простими, тобто мають спільний простий дільник p. Зазначимо, що $a^3+ab+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+ab$, звідки випливає, що $(a+b)^3+ab \vdots p$. Крім того, $(a+b)^4=(a+b)(a+b)^3=(a+b)((a+b)^3+ab)-ab(a+b)$, тому й $(a+b)^4 \vdots p$, а оскільки p — просте, $a+b \vdots p$. Враховуючи, що $(a+b)^3+ab \vdots p$, маємо $ab \vdots p$. За умовою числа a та b взаємно прості, тому на p ділиться рівно одне з них. Але це суперечить тому, що $a+b \vdots p$. Одержана суперечність завершує доведення.

7. ***Розв'язання.*** Припустимо, що для деякої розстановки чисел кількість ординарних рядків, які утворилися, не перевищує n. Тоді рядків, що не є ординарними, утворилося не менше за n. Тож можемо розглянути деякі n таких рядків. Нехай без утрати загальності це перший, другий, …, n-й рядки таблиці. Позначмо через m_i найбільше число i-го рядка, а через s_i суму всіх чисел i-го рядка за винятком максимального числа цього рядка m_i. Згідно з припущенням, $m_i \geqslant s_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тоді $\sum_{i=1}^n m_i \geqslant \sum_{i=1}^n s_i$. Вираз $\sum_{i=1}^n m_i$ є сумою n чисел таблиці, тому $\sum_{i=1}^n m_i < n\cdot 4n^2=4n^3$. Водночас $\sum_{i=1}^n s_i$ є сумою $n(2n-1)$ чисел таблиці, тому $\sum_{i=1}^n s_i \geqslant 1+2+\ldots+n(2n-1)=\dfrac{n(2n-1)(n(2n-1)+1)}{2}$.
Сумістивши нерівності, матимемо:

$$4n^3 > \sum_{i=1}^n m_i \geqslant \sum_{i=1}^n s_i \geqslant \frac{n(2n-1)(n(2n-1)+1)}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8n^2 > (2n-1)(n(2n-1)+1)=(2n-1)(2n^2-n+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8n^2 > (4n^3-2n^2+2n)-(2n^2-n+1)=4n^3-4n^2+3n-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4n^3-12n^2+3n-1<0 \Leftrightarrow 4n^2(n-3)+3n-1<0.$$

Очевидно, за умови $n \geqslant 3$ остання нерівність справджуватися не може — дістали суперечність.

8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Середня ліга. Група «Б»

1. *Задача № 1 групи «А» середньої ліги.*

2. *Задача № 2 групи «А» середньої ліги.*

3. ***Відповідь:*** $60°$.
Розв'язання. Позначимо основу проведеної висоти через H, а точку перетину трьох прямих — через R (рис. 7). Як відомо, кожна точка серединного перпендикуляра рівновіддалена від кінців відрізка. Тому $AR = RC$, звідки $\angle RCA = \angle RAC = \angle RAH$. Кут BAC не може бути прямим, бо тоді висота й бісектриса перетиналися б у точці A, через яку не може проходити серединний перпендикуляр. Значить, $\angle CHA = 90°$, і з трикутника CHA $\angle RCA + \angle RAC + \angle RAH = 180° - \angle CHA = 90°$. Але ми встановили, що ці три кути рівні, тож кожен із них дорівнює по $30°$, а $\angle BAC = \angle RAC + \angle RAH = 60°$.

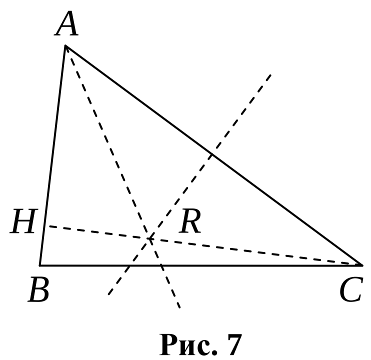

Рис. 7

Слід також зауважити, що умова задачі несуперечлива, тобто кут BAC справді може дорівнювати $60°$. Щоб показати це, досить узяти правильний трикутник ABC, який, очевидно, задовольняє умову.

4. ***Розв'язання.*** Зауважимо, що AI, CI та BI_A є бісектрисами відповідно кута A, кута C та зовнішнього кута B трикутника ABC (рис. 8). Крім того, центр зовнівписаного кола I_A також лежить на бісектрисі AI. Ці твердження є наслідком того, що центр кола, вписаного в кут, лежить на осі симетрії цього кута, тобто на його бісектрисі. Тож маємо:

$$\angle IAC = \angle BAI_A,$$

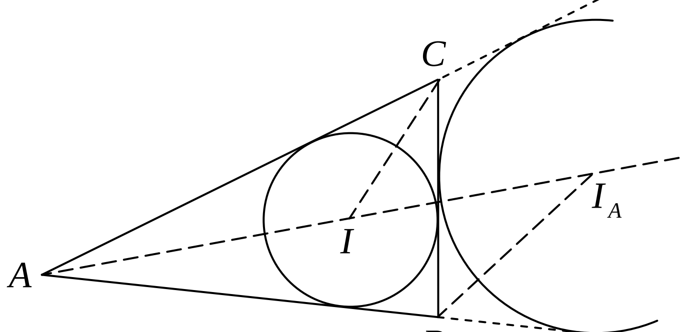

Рис. 8

$$\angle AIC = 180^\circ - \angle IAC - \angle ICA = 180^\circ - (\angle BAC + \angle BCA)/2 = 180^\circ - (180^\circ - \angle ABC)/2 = 90^\circ + \angle ABC/2,$$
$$\angle ABI_A = \angle ABC + \angle CBI_A = \angle ABC + (180^\circ - \angle ABC)/2 = 90^\circ + \angle ABC/2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \angle AIC = \angle ABI_A.$$

Таким чином, відповідні кути трикутників AIC та ABI_A рівні, тобто $\Delta AIC \sim \Delta ABI_A$. А звідси вже $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{AB}{AI_A}$ та $AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$.

5. *Задача № 5 групи «А» середньої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Старша ліга. Група «А»

1. ***Розв'язання.*** Згідно з нерівністю Коші — Буняковського, для довільних дійсних чисел a_i та b_i
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Підставмо сюди $a_i = \sqrt{x_i y_i}$ та $b_i = \sqrt{\dfrac{x_i}{y_i}}$, $1 \leqslant i \leqslant n$:
$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leqslant (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n}{y_n}\right).$$

Тепер поділімо обидві частини на $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ та скористаймося нерівністю з умови задачі:
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \cdot \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n}{y_n}\right) \leqslant \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n}{y_n}.$$

2. ***Розв'язання.*** Розглянемо послідовність (y_n), таку що $x_n = 4y_n$, $n \geqslant 0$. Переписуючи рекурентне співвідношення, задане в умові задачі, матимемо для $n \geqslant 2$
$$x_n = \frac{4\max\{x_{n-1}, 4\}}{x_{n-2}} \Leftrightarrow 4y_n = \frac{4\max\{4y_{n-1}, 4\}}{4y_{n-2}} \Leftrightarrow y_n = \frac{\max\{y_{n-1}, 1\}}{y_{n-2}}.$$

Тепер стане простіше розглянути кілька випадків і довести, що послідовність (y_n), а отже й (x_n), періодична — див. таблицю.

	$y_0 \leqslant 1,\ y_1 \leqslant 1$	$y_0 \leqslant 1,\ y_1 > 1$	$y_0 > 1,\ y_1 \leqslant 1$	$y_1 \geqslant y_0 > 1$	$y_0 > y_1 > 1$
y_2	$\frac{1}{y_0}$	$\frac{y_1}{y_0}$	$\frac{1}{y_0}$	$\frac{y_1}{y_0}$	$\frac{y_1}{y_0}$
y_3	$\frac{1}{y_0y_1}$	$\frac{1}{y_0}$	$\frac{1}{y_1}$	$\frac{1}{y_0}$	$\frac{1}{y_1}$
y_4	$\frac{1}{y_1}$	$\frac{1}{y_1}$	$\frac{y_0}{y_1}$	$\frac{y_0}{y_1}$	$\frac{y_0}{y_1}$
y_5	y_0	y_0	y_0	y_0	y_0
y_6	y_1	y_1	y_1	y_1	y_1

Рис. 9

Як видно, в усіх випадках $y_5 = y_0$, а $y_6 = y_1$. Оскільки кожен наступний член залежить тільки від двох попередніх, обидві послідовності (y_n) та $(x_n) = (4y_n)$ періодичні з періодом 5. Це означає, що $x_{2012} = x_{37} = x_{152}$, звідки й випливає потрібна рівність.

3. ***Розв'язання.*** Позначимо через O_B центр зовнівписаного кола, що дотикається до *AC*, а через *E* центр кола дев'яти точок (рис. 10). Точки *E*, *I* та *F*, як і точки *E*, F_B та O_B, лежать на одній прямій, бо *F* та F_B є точками дотику кіл з відповідними центрами. До того ж $E \neq I$, бо інакше кола або не мали б спільних точок, або збігалися б. Враховуючи це, якщо точка *E* лежить на прямій IO_B, тобто на бісектрисі кута *B*, то й точки *F* та F_B також лежать на цій прямій. Тоді обидві прямі *IF* та BF_B збігаються з бісектрисою.

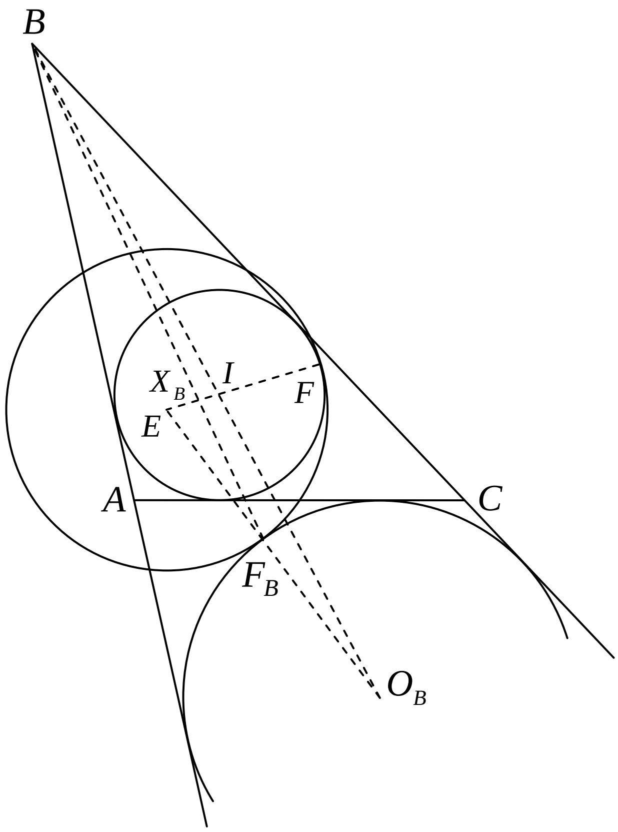

Рис. 10

Нехай тепер *E* лежить поза прямою IO_B. Точка F_B міститься всередині сторони EO_B трикутника EIO_B, оскільки кола дотикаються зовнішнім чином. Точка ж *B* лежить на продовженні сторони O_BI цього трикутника. Тому пряма BF_B перетинає пряму $EI = IF$ у деякій точці X_B, причому X_B є внутрішньою точкою відрізка *EI*. Тепер можемо записати твердження теореми Менелая для трикутника EIO_B та прямої, що проходить через точки *B*, X_B та F_B:

$$\frac{EX_B}{X_BI} \cdot \frac{IB}{BO_B} \cdot \frac{O_BF_B}{F_BE} = 1.$$

Позначимо через *r* радіус уписаного кола трикутника *ABC*, через r_B радіус його позавписаного кола, що дотикається до сторони *AC*, а через R_9 радіус кола дев'яти точок. Якщо опустити перпендикуляри-радіуси II' та $O_BO'_B$ з точок *I* та O_B на пряму *AB*, утворяться подібні прямокутні трикутники BII' та $BO_BO'_B$ з коефіцієнтом подібності $\frac{BO_B}{BI} = \frac{O_BO'_B}{II'} = \frac{r_B}{r}$. Це означає, що

$$\frac{EX_B}{X_BI} = \frac{BO_B}{IB} \cdot \frac{F_BE}{O_BF_B} = \frac{r_B}{r} \cdot \frac{R_9}{r_B} = \frac{R_9}{r}.$$

Таким чином, пряма BF_B проходить через єдину таку точку *X* на відрізку *EI*, для якої $\frac{EX}{XI} = \frac{R_9}{r}$.

Це ж твердження справджується, очевидно, і у випадку, коли *E* лежить на прямій IO_B, бо, як показано вище, у цьому разі всі точки відрізка *EI* належать прямій BF_B.

З цілком аналогічних міркувань випливає, що й прямі AF_A та CF_C проходять через ту ж точку $X \in EI$, для якої $\frac{EX}{XI} = \frac{R_9}{r}$. Щоб завершити доведення, залишається згадати, що точка *X*, як і весь відрізок *EI*, належить ще й прямій *IF*.

Зауважимо, що традиційно точкою Фейєрбаха називають тільки одну точку — місце дотику кола дев'яти точок до вписаного кола; інші три точки назви не мають. Неточність у формулюванні умови допущено, аби підкреслити, що всі чотири точки існують незалежно від будови трикутника.

4. *Задача № 4 групи «А» середньої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» середньої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» середньої ліги.*

7. ***Відповідь:*** $2n-3$.

Розв'язання. Використаймо метод математичної індукції. Для $n=2$ найбільше можливе значення k дорівнює $2n-3=1$, оскільки, як нескладно пересвідчитися, у парі жодні дві з чотирьох можливих підмножин умову не задовольняють.

Нехай доведено, що для числа $n-1$ найбільше можливе значення k дорівнює $2(n-1)-3=2n-5$. Доведемо, що для числа $n \geqslant 3$ воно складає $2n-3$. Для цього спершу розглянемо один із максимальних наборів підмножин A_1, A_2, …, $A_{2(n-1)-3}$, який не містить ні порожньої множини, ні її доповнення — множину $\{1, 2, ..., n-1\}$: для $n-1=2$ такий набір, очевидно, існує, а для $n-1 \geqslant 3$ жодна множина і так не може бути порожньою або її доповненням, бо інакше давала б із кожною іншою множиною два порожніх перетини. За побудовою $A_i \subset \{1, 2, ..., n-1\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2n-5$. Сформуємо новий набір A'_1, A'_2, …, A'_{2n-5}, A'_{2n-4}, A'_{2n-3}, $A'_i \subset \{1, 2, ..., n\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2n-3$, у такий спосіб: $A'_{2n-4} = n-1$, $A'_{2n-3} = n$, а для $i \leqslant 2n-5$ A'_i утворене з A_i заміною елемента $n-1$ на пару елементів $n-1$, n (множина не змінюється, якщо вона не містила числа $n-1$, або до неї додається елемент n, якщо число $n-1$ у множині було). Сформований набір містить $2n-3$ множини і задовольняє умову задачі, оскільки для індексів i та j, $1 \leqslant i < j \leqslant 2n-3$:

- Якщо $j \leqslant 2n-5$, те, що рівно один із чотирьох перетинів буде порожнім, випливає з твердження індукції: у кожному перетині елемент $n-1$, якщо такий був, міняється на пару чисел $n-1$, n, тож перетин виявиться порожнім у тому й лише в тому випадку, якщо він був порожнім до заміни.
- Якщо $j > 2n-5$, A'_j складається з єдиного елемента — числа $n-1$ або n — та не може збігатися ні з множиною A'_i, ні з множиною $A_i'^{\complement}$, бо кожна з них містить або не містить ці два числа водночас (якщо $i \leqslant 2n-5$). Крім того, A'_i та $A_i'^{\complement}$ не можуть бути порожніми, бо інакше (якщо $i \leqslant 2n-5$) одна з множин A_i чи $A_i^{\complement}$ також була би порожньою. Таким чином, із чотирьох перетинів $A'_i \cap A'_j$, $A'_i \cap A_j'^{\complement}$, $A_i'^{\complement} \cap A'_j$ та $A_i'^{\complement} \cap A_j'^{\complement}$ порожньою буде лише множина $A_i'^{\complement} \cap A'_j$, якщо $A'_j \subset A'_i$, або $A'_i \cap A'_j$, якщо $A'_j \not\subset A'_i$.

Покажемо тепер, що наведений спосіб є, умовно кажучи, єдиним шляхом утворити максимальний набір для числа n. Це означатиме, що набір із кількістю елементів, більшою за $2n-3$, побудувати неможливо.

Нехай A_1, A_2, …, A_k — набір для числа $n \geqslant 3$, причому значення k максимальне. Оскільки кожну множину A_i можна замінити на $A_i^{\complement}$ і при цьому набір як і раніше задовольнятиме умову задачі, можемо вважати, що з двох множин A_i та $A_i^{\complement}$ множина A_i завжди є не більшою, тобто містить не більше за $n/2$ чисел, а $A_i^{\complement}$ є не меншою та складається із щонайменше $n/2$ елементів. У той же час у наборі не може бути двох однакових множин, бо якби $A_i = A_j$, $i \neq j$, то відразу два перетини $A_i \cap A_j^{\complement}$ та $A_i^{\complement} \cap A_j$ були б порожніми.

Припустимо, що $k > 2n-3 \Leftrightarrow k \geqslant 2n-2$. Порожньої множини в наборі немає (див. вище), а одноелементних множин не більше за $n < 2n-2$, тому набір містить хоча б одну множину, що має принаймні два елементи. Виберімо з таких неодноелементних множин найменшу множину A_m. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що серед чисел, які містить ця множина, є числа $n-1$ та n. Розгляньмо довільну множину A_l, $l \neq m$, відмінну від $\{n-1\}$ та $\{n\}$, та покажімо, що числа $n-1$ та n містяться або не містяться в A_l водночас:

- Якщо $A_m \cap A_l = \varnothing$, то A_l не може містити жодного з чисел $n-1$ та n.
- Якщо $A_m \cap A_l^{\complement} = \varnothing$, то $A_l^{\complement}$ не може містити жодного з чисел $n-1$ та n, тому A_l містить оби-

два цих числа.

— Якщо $A_m^{\complement} \cap A_l = \varnothing$, то $A_m \supset A_l$, тому A_l менша за A_m. Тоді A_l повинна складатися з єдиного числа, адже за побудовою A_m є найменшою з неодноелементних множин. Оскільки за припущенням $A_l \ne \{n-1\}$ та $A_l \ne \{n\}$, ця множина не містить жодного з чисел $n-1$ та n.

— Якщо $A_m^{\complement} \cap A_l^{\complement} = \varnothing$, то, враховуючи, що обидві множини містять не менше за $n/2$ елементів, вони обидві повинні складатися рівно з $n/2$ різних чисел. Але це значить, що $A_m = A_l^{\complement}$, звідки випливає, що перетин $A_m \cap A_l$ так само порожній. А цього бути не може.

Отже, з початкового набору A_1, A_2, …, A_k можна відкинути множини $\{n-1\}$ та $\{n\}$ (якщо там такі були), а в усіх інших множинах замінити пару елементів $n-1$, n на одне число $n-1$ (тобто вилучити з усіх множин число n), унаслідок чого матимемо набір для числа $n-1$, який складається щонайменше з $k-2$ множин та задовольняє умову задачі: у кожному перетині пара чисел $n-1$, n, якщо така була, зміниться на єдине число $n-1$, тож перетин виявиться порожнім у тому й лише в тому випадку, якщо він був порожнім до заміни. Тоді за припущенням індукції $k-2 \leqslant 2n-5$, звідки $k \leqslant 2n-3$. Дістали суперечність із припущенням, що $k > 2n-3$. Тому справді $k \leqslant 2n-3$.

8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

<u>Старша ліга. Група «Б»</u>

1. *Задача № 1 групи «А» старшої ліги.*

2. ***<u>Відповідь</u>:*** $P(x) = 2a^3x^3 + 2a^2x^2 + ax + \dfrac{1}{2}$, де $a \ne 0$.

<u>Розв'язання</u>. Степені многочленів $P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_{n-1}(x)$ та $P(x)$ мають бути рівними, оскільки їхня різниця — стала величина. Тому $1+2+\ldots+(n-1)=n$, звідки $n=3$. Тоді

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ P_1(x) = a_1x + a_0,\ P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Рівність з умови задачі можна записати як $P(x) = P_1(x)\cdot P_2(x) + c$ для деякої константи c, тобто

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (a_1x + a_0)(a_2x^2 + a_1x + a_0) + c = a_1a_2x^3 + (a_1^2 + a_0a_2)x^2 + 2a_0a_1x + (a_0^2 + c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_3 = a_1a_2,\ a_2 = a_1^2 + a_0a_2,\ a_1 = 2a_0a_1,\ a_0 = a_0^2 + c.$$

За умовою $a_1 \ne 0$, тому з рівності $a_1 = 2a_0a_1$ випливає $a_0 = \dfrac{1}{2}$, а далі з $a_0 = a_0^2 + c$ маємо $c = \dfrac{1}{4}$. З рівності $a_2 = a_1^2 + a_0a_2 \Leftrightarrow a_2 = a_1^2 + \dfrac{a_2}{2}$ маємо $a_2 = 2a_1^2$, а з $a_3 = a_1a_2$, що $a_3 = 2a_1^3$. З іншого боку, для довільного ненульового a_1 числа $a_2 = 2a_1^2$, $a_3 = 2a_1^3$, $a_0 = \dfrac{1}{2}$ та $c = \dfrac{1}{4}$ є ненульовими і задовольняють усі чотири рівності, наведені вище, тобто дають розв'язок.

3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*

4. *Задача № 4 групи «А» середньої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» середньої ліги.*

6. ***<u>Відповідь</u>:*** $(-1, 3)$, $(0, 0)$ та $(1, 2)$.

<u>Розв'язання</u>. Розглянемо рівність як квадратну відносно b:

$$7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2 \Leftrightarrow 5b^2 + (5a-14)b + 5a^2 - 7a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{14 - 5a \pm \sqrt{(5a-14)^2 - 20(5a^2 - 7a)}}{10} = \frac{14 - 5a \pm \sqrt{(25a^2 - 140a + 196) - (100a^2 - 140a)}}{10} =$$

$$= \frac{14 - 5a \pm \sqrt{196 - 75a^2}}{10} \Rightarrow a^2 \leqslant \frac{196}{75} < 3 \Rightarrow |a| \leqslant 1.$$

Лишається перебрати можливі варіанти для a і для кожного за формулою $b = \frac{14 - 5a \pm \sqrt{196 - 75a^2}}{10}$ обчислити відповідні значення b: матимемо по одному цілому значенню для кожного $a \in \{-1, 0, 1\}$.

7. *Задача № 7 групи «А» середньої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Старша ліга. Група «В»

1. *Задача № 1 групи «А» середньої ліги.*

2. *Задача № 2 групи «Б» старшої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*

4. *Задача № 4 групи «Б» середньої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» середньої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «Б» старшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «А» середньої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*