Задачі для підготовки до командної олімпіади, молодша та середня ліги

1. За круглим столом сидять 12 аборигенів, кожний з яких є або брехуном (завжди каже неправду), або лицарем (завжди каже правду). Кожен сказав: «Лише один з моїх сусідів — брехун». Скільки лицарів було за столом?
2. Згадайте або придумайте, як з допомогою лише лінійки (без поділок), циркуля та олівця позначити середину заданого відрізка.
3. Двоє гравців грають у гру. Спочатку вони склали купку з 2010 камінців. Після цього перший гравець бере з купки 1, 2 або 3 камінці, далі те саме робить другий, потім знову перший і т. д. Гра зупиняється тоді, коли в купці не лишається камінців. Переможцем вважають того гравця, який забрав з купки останні камінці. Хто виграє за правильної гри: перший гравець чи другий?
4. Простим називається натуральне число, більше від 1, яке ділиться лише на себе й на одиницю. Знайдіть усі прості числа p такі, що $p + 3$ — також просте.
5. Поліна, Даша, Олена та Юля були на математичній олімпіаді. У відповідь на питання «Хто з вас розв’язав останню задачу?» кожна дівчинка висловила два твердження:
   Поліна: «Даша не розв’язала задачі. Я теж її не розв’язала».
   Даша: «Юля розв’язала задачу. А от Олена — ні».
   Олена: «Задачу розв’язала Юля. А ось я не змогла».
   Юля: «Поліна розв’язала задачу. Олена — теж».
   Хто міг розв’язати задачу, якщо кожна дівчинка один раз сказала правду, а один раз помилилася? Перерахуйте всі можливі випадки: задачу могли розв’язати й кілька дівчат одразу.
6. З’ясуйте, при яких n сума n перших натуральних чисел $(1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n)$ ділиться на n.

Підказки до задач

1. Спробуйте розглянути якогось лицаря і з’ясуйте, хто насправді міг сидіти поруч із ним за столом. Потім візьміть ще когось, чию особистість з’ясували, і продовжуйте, поки не стане зрозуміло, хто є хто серед 12 аборигенів. Але будьте обачні: чи обов’язково за столом є хоча б один лицар?
2. Побудуйте два кола з центрами в кінцях відрізка і радіусами, що дорівнюють довжині відрізка.
3. Спробуйте довести, що другий гравець перемагає тоді і лише тоді, коли початкова кількість камінців у купці ділиться на 4.
4. Зверніть увагу на парність чисел p та $p + 3$.
5. Переберіть усі можливі варіанти. Почніть, наприклад, з припущення, що правдивим із двох тверджень Поліни є перше.
6. Спробуйте згрупувати доданки в такий спосіб: $n + (1 + (n - 1)) + (2 + (n - 2)) + \ldots$ Також можна скористатися формулою суми членів арифметичної прогресії.