IX Київський відкритий турнір математичних боїв ім. Лесі Рубльової

Усна командна олімпіада

Умови задач

Молодша ліга

1. Андрій стріляє в тирі. За кожен влучний постріл у велику зелену мішень хлопець здобуває 5 очок, за кожне потрапляння в меншу жовту мішень — 8 очок, а за кожен раз, коли хлопець влучає в малу червону мішень, — 10 очок. Відомо, що загалом Андрій вибив 99 очок. При цьому в жовту та червону мішені він поцілив однакову кількість разів, а жодної з трьох мішеней не досягли рівно 25 % Андрієвих пострілів. Скільки всього пострілів зробив хлопець?

2. Від шестицифрового числа, яке не містить нулів і ділиться на 37, відокремили кілька перших цифр (можливо, одну) і переставили їх у кінець числа. Доведіть, що утворене шестицифрове число теж ділиться на 37.

3. У ряд розклали 8 гаманців, у кожному з яких лежить по 13 однакових монет, після чого одну монету з деякого гаманця переклали в гаманець, сусідній справа. Як за два зважування на шалькових терезах без гир визначити, з якого гаманця переклали монету?

4. На сторонах *AB* та *AC* трикутника *ABC* позначили відповідно точки *M* і *N* так, що $\angle BMC = 4x$, $\angle BCM = 6x$, а $\angle CNB = \angle CBN = 5x$. Доведіть, що трикутник *ABC* рівнобедрений.

5. Цілі числа *a, b, c, d* та *A* задовольняють рівності $a^2 + A = b^2$ і $c^2 + A = d^2$. Доведіть, що значення виразу $2(a+b)(c+d)(ac+bd-A)$ — квадрат цілого числа.

6. На сторонах *AB, BC* й *CA* трикутника *ABC* вибрано відповідно точки *D, E* та *F* такі, що $EF \parallel AB$ і $ED \parallel AC$. Прямі *DF* і *BC* перетинаються в точці *K*. Виявилось, що $DF = FK$. Знайдіть відношення $BE : EC$.

7. Чи можна на кожне поле шахівниці 8×8 поставити білого або чорного короля так, щоб кожен король бив більше королів чужого кольору, ніж свого, а загальна кількість білих та чорних королів була різною?

8. Власним дільником називається довільний додатний дільник натурального числа, відмінний від самого числа. Назвімо натуральне число чарівним, якщо воно має принаймні три власні дільники і з трьох його найбільших власних дільників один дорівнює сумі двох інших. Скільки серед перших 2012 натуральних чисел чарівних?

Середня ліга

1. Андрій стріляє в тирі. За кожен влучний постріл у велику зелену мішень хлопець здобуває 5 очок, за кожне потрапляння в меншу жовту мішень — 8 очок, а за кожен раз, коли хлопець влучає в малу червону мішень, — 10 очок. Відомо, що загалом Андрій вибив 197 очок. При цьому в жовту та червону мішені він поцілив однакову кількість разів, а жодної з трьох мішеней не досягли рівно 25 % Андрієвих пострілів. Скільки всього пострілів зробив хлопець?

2. *Задача № 4 молодшої ліги.*

3. *Задача № 3 молодшої ліги.*

4. *Задача № 5 молодшої ліги.*

5. Доведіть, що для довільного натурального *n* принаймні одне з чисел 3*n* та 7*n* міс-

тить непарну цифру.
6. *Задача № 7 молодшої ліги.*
7. *Задача № 8 молодшої ліги.*
8. *Задача № 5 старшої ліги, пункт а).*

Старша ліга

1. *Задача № 3 молодшої ліги.*
2. Знайдіть усі функції $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, визначені на множині додатних дійсних чисел, такі, що для довільних додатних x та y справджується рівність
$$xy\cdot(3f(x/y)+5f(y/x))=3x^2+5y^2.$$
3. Доведіть, що для будь-якого натурального k існує нескінченно багато чисел, які можна подати і як суму k послідовних натуральних чисел, і як суму $k+1$ послідовного натурального числа.
4. *Задача № 7 молодшої ліги.*
5. У прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AB провели висоту CD. Усередині трикутника ACD побудували коло, яке дотикається до описаного кола трикутника BCD, а також до відрізків AC й AD в точках N та M відповідно. Доведіть, що справджуються рівності:
а) $BD\cdot CN+BC\cdot DM=CD\cdot BM$,
б) $BM=BC$.
6. Хай x, y і z — додатні числа, що задовольняють умову $xyz=1$. Доведіть нерівність
$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\leqslant\frac{1}{2}.$$
7. Послідовність цілих чисел (a_n) така, що другий її член a_2 непарний і для кожного $n\in\mathbb{N}$ справджується рівність $n(a_{n+1}-a_n+3)=a_{n+1}+a_n+3$. Знайдіть найменше натуральне $n\geqslant 2$, для якого $a_n \vdots 2012$, якщо відомо, що $a_{2011} \vdots 2012$.
8. У гострокутному трикутнику ABC провели медіану AM і висоти BB_1 та CC_1. Перпендикуляр до AM, що проходить через точку A, перетинає прямі BB_1 і CC_1 у точках E та F. Нехай P та Q — точки перетину двох кіл, кожне з яких лежить усередині кола, описаного навколо ΔEFM, дотикається до цього кола в точці, що лежить по інший бік від прямої EF, ніж точка M, а також дотикається до відрізка EF. Доведіть, що точки M, P та Q лежать на одній прямій.

Відповіді та розв'язання

Молодша ліга

1. ***Відповідь:*** 20**.**

Розв'язання. Нехай Андрій поцілив у зелену мішень x разів, а в жовту та червону — по y разів. Маємо рівність $5x+8y+10y=99$, або $5x+18y=99$. Щоб розв'язати це рівняння в цілих невід'ємних числах, досить розглянути кілька випадків:

— Якщо $y=0$, то число $5x=99-18y=99$ не кратне 5, тобто розв'язків немає.

— Якщо $y=1$, то $5x=99-18y=81$ не кратне 5, і розв'язків знову нема.

— Якщо $y=2$, то $5x=99-18y=63$ не ділиться на 5, розв'язків немає.

— Якщо $y=3$, то $5x=99-18y=45$; маємо розв'язок $x=9$, $y=3$.

— Якщо $y=4$, то $5x=99-18y=27$ не ділиться на 5.

— Якщо $y=5$, то $5x=99-18y=9$ не кратне 5.

— Якщо $y\geqslant 6$, то $5x=99-18y<0$, і розв'язків у цілих невід'ємних числах нема.

Таким чином, Андрій влучив 9 разів у зелену мішень і по 3 рази в жовту та червону мішені, тобто зробив 15 влучних пострілів. За умовою це число складає три чверті від загальної кількості пострілів, а ця кількість дорівнює, відповідно, $\frac{4}{3}\cdot 15=20$.

2. ***Розв'язання.*** Припустимо спершу, що в кінець числа переставили одну цифру. Якщо початкове число N мало вигляд

$$N=\overline{abcdef}=100\,000a+10\,000b+1000c+100d+10e+f,$$

де a, b, c, d, e, f — деякі (не обов'язково різні) цифри, то утворене число M дорівнюватиме

$$M=\overline{bcdefa}=100\,000b+10\,000c+1000d+100e+10f+a.$$

Різниця числа $10N$, яке за умовою ділиться на 37, і числа M дорівнює

$$10N-M=1\,000\,000a-a=999\,999a \,\vdots\, 111 \,\vdots\, 37,$$

а отже, і число M ділиться на 37.

Лишається зауважити, що, якщо повторити операцію переставляння в кінець першої цифри числа k разів, ми отримаємо те ж число, яке б отримали, якби відразу переставили в кінець числа k його перших цифр. При цьому на кожному кроці, зокрема й після всіх k операцій, утворюється число, кратне 37.

3. ***Розв'язання.*** Занумеруймо гаманці зліва направо: № 1, № 2, …, № 8. Можна запропонувати такий алгоритм зважування. Спершу порівнюємо вагу гаманців № 3 та № 6:

— Якщо вага гаманців однакова, то з жодного з них не могли перекласти монету і в жоден з цих гаманців перекладена монета потрапити не могла. Це означає, що монету переклали з гаманця № 1, № 4 або № 7. Зважмо № 1 та № 4:
  - o якщо вони важать однаково, монету переклали з гаманця № 7;
  - o якщо гаманець № 1 легший, монету переклали з нього;
  - o якщо гаманець № 4 виявився легшим, монету переклали з нього.

— Якщо гаманець № 3 легший за № 6, то монету переклали або з нього, або з гаманця № 5 у шостий гаманець. Зважуємо № 3 і № 5:
  - o якщо монету переклали з гаманця № 3, він буде легшим;
  - o якщо монету переклали з гаманця № 5, цей гаманець виявиться легшим.

— Якщо гаманець № 3 важчий за № 6, то монету переклали або з гаманця № 2 у третій гаманець, або з шостого гаманця в сьомий. Зважуємо № 2 і № 6:
  - o якщо монету переклали з гаманця № 2, він буде легшим;
  - o якщо монету переклали з гаманця № 6, цей гаманець виявиться легшим.

4. ***Розв'язання.*** Сума кутів трикутника BMC дорівнює $180°$, звідки (рис. 1)

$$\angle MBC=180°-\angle BMC-\angle BCM=180°-10x.$$

Так само сума кутів трикутника BNC дорівнює $180°$, звідки

$$\angle NCB = 180° - \angle CNB - \angle CBN = 180° - 10x.$$

Це означає, що $\angle B = \angle MBC = \angle NCB = \angle C$, тобто трикутник ABC рівнобедрений.

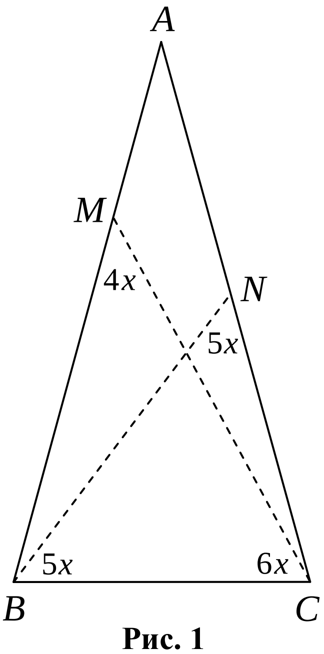

Рис. 1

5. ***<u>Розв'язання</u>.*** Проведемо серію перетворень:

$$2(a+b)(c+d)(ac+bd-A) = (a+b)(c+d)(2ac+2bd-2A) =$$
$$= (a+b)(c+d)(2ac+2bd-(b^2-a^2)-(d^2-c^2)) =$$
$$= (a+b)(c+d)((a+c)^2-(b-d)^2) =$$
$$= (a+b)(c+d)(a+c-(b-d))(a+c+(b-d)) =$$
$$= (a+b)(c+d)((a-b)+c+d)(a+b+(c-d)) =$$
$$= (a^2-b^2+(a+b)(c+d))((a+b)(c+d)+c^2-d^2) =$$
$$= ((a+b)(c+d)-A)((a+b)(c+d)-A) = ((a+b)(c+d)-A)^2.$$

6. ***<u>Відповідь</u>:*** 2.

<u>Розв'язання</u>. З умови задачі випливає, що точка K лежить на продовженні сторони BC за точку C (рис. 2). Відрізок FC паралельний до сторони DE трикутника KDE і проходить через середину іншої його сторони KD. Тому FC — середня лінія цього трикутника, звідки $KC = CE$. З іншого боку, відрізок FE паралельний до сторони DB трикутника KDB і проходить через середину відрізка KD. Тому FE — середня лінія трикутника KDB і $KE = EB$. Звідси $BE = KE = 2EC$.

Зауважимо: з допомогою подібних міркувань можна показати, що якщо в довільному трикутнику вибрати точку E на стороні BC, для якої $BE : EC = 2$, а F і D на сторонах AC й AB відповідно такі, що $EF \parallel AB$ і $ED \parallel AC$, то умова задачі справджуватиметься, тобто точка K існуватиме, а відрізки DF і FK будуть рівними.

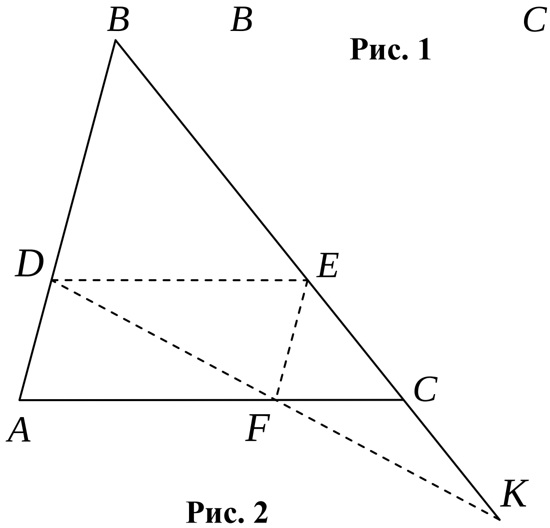

Рис. 2

7. ***<u>Відповідь</u>:*** можна.

<u>Розв'язання</u>. Приклад розстановки королів, яка задовольняє умову задачі, показано на рис. 3: клітинки, де має бути розташовано чорних королів, зафарбовано, а поля, де повинні стояти білі королі, залишено незафарбованими.

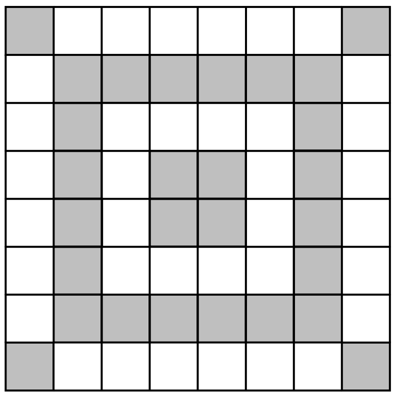
Рис. 3

8. ***<u>Відповідь</u>:*** 134.

<u>Розв'язання</u>. Кожне чарівне число повинно бути парним, бо всі дільники непарних чисел непарні, а сума двох непарних чисел не може бути непарною. Хай тепер 1, 2, a, b — чотири найменші дільники деякого чарівного числа N. Тоді найбільшими власними дільниками N є числа $\frac{N}{2}$, $\frac{N}{a}$ і $\frac{N}{b}$, причому $\frac{N}{2} = \frac{N}{a} + \frac{N}{b}$.

Якщо обидва числа a та b більші за 3, то $\frac{N}{a} + \frac{N}{b} \leqslant \frac{N}{4} + \frac{N}{5} < \frac{N}{2}$.

Отже, один із дільників дорівнює 3. Неважко підрахувати, що інший дільник у такому випадку повинен дорівнювати 6. Це означає, що кожне чарівне число ділиться на 6, але не ділиться ні на 4, ні на 5, адже числа 1, 2, 3 і 6 — найменші дільники N. У той же час кожне натуральне число, яке ділиться на 6, але не ділиться ні на 4, ні на 5, справді є чарівним, бо числа 1, 2, 3 і 6 є його найменшими дільниками, а $\frac{N}{2}$, $\frac{N}{3}$ і $\frac{N}{6}$, відповідно, найбільшими (із власних).

Серед перших 2012 натуральних чисел таких чисел, що діляться на 6, є $\left[\frac{2012}{6}\right] = 335$. Водночас і на 6, і на 4 діляться числа, кратні 12, а таких є $\left[\frac{2012}{12}\right]=167$. Водночас і на 6, і на 5 діляться числа, кратні 30, таких $\left[\frac{2012}{30}\right]=67$. Тепер ми повинні відняти 167 і 67 від 335, але при цьому кількість чисел, які діляться і на 6, і на 4, і на 5, тобто кратних 60, ми віднімаємо двічі, тому до різниці додамо ще $\left[\frac{2012}{60}\right]=33$. Результатом маємо $335-167-67+33=134$ чарівних числа.

Середня ліга

1. ***Відповідь:*** 44.

Розв'язання. Нехай Андрій поцілив у зелену мішень x разів, а в жовту та червону — по y разів. Маємо рівність $5x+8y+10y=197$, або $5x+18y=197$. Щоб розв'язати це рівняння в цілих невід'ємних числах, досить розглянути кілька випадків:

— Якщо $y=0$, то число $5x=197-18y=197$ не кратне 5, тобто розв'язків немає.

— Якщо $y=1$, то $5x=197-18y=179$ не кратне 5, і розв'язків знову нема.

— Якщо $y=2$, то $5x=197-18y=161$ не ділиться на 5, розв'язків немає.

— Якщо $y=3$, то $5x=197-18y=143$ не ділиться на 5.

— Якщо $y=4$, то $5x=197-18y=125$; маємо розв'язок рівняння: $x=25$, $y=4$.

— Якщо $y=5$, то $5x=197-18y=107$ не ділиться на 5.

— Якщо $y=6$, то $5x=197-18y=89$ не кратне 5.

— Якщо $y=7$, то $5x=197-18y=71$ не кратне 5.

— Якщо $y=8$, то $5x=197-18y=53$ не ділиться на 5.

— Якщо $y=9$, то $5x=197-18y=35$; маємо ще один розв'язок рівняння: $x=7$, $y=9$.

— Якщо $y=10$, то $5x=197-18y=17$ не ділиться на 5.

— Якщо $y\geqslant 11$, то $5x=197-18y<0$, і розв'язків у цілих невід'ємних числах нема.

Таким чином, маємо два варіанти: або Андрій влучив 25 разів у зелену мішень і по 4 рази в жовту та червону, або хлопець 7 разів потрапив у зелену мішень і по 9 у жовту та червону. У першому випадку влучних пострілів було 33, що складає за умовою три чверті від загальної кількості пострілів. Тоді всього пострілів мало бути 44. У другому випадку кількість влучних пострілів повинна була б дорівнювати 25, але це число не складає три чверті від цілої величини, тому такий варіант насправді не є можливим.

2. *Задача № 4 молодшої ліги.*

3. *Задача № 3 молодшої ліги.*

4. *Задача № 5 молодшої ліги.*

5. ***Розв'язання.*** Спершу припустимо, що число n не закінчується нулем, тобто не ділиться на 10. Якщо остання цифра цього числа непарна, то непарними будуть і останні цифри чисел $3n$ та $7n$. Нехай остання цифра числа n парна. Почнемо складати в стовпчик числа $3n$ і $7n$. У сумі має вийти число $10n$, остання цифра якого — нуль, а передостання цифра парна, бо збігається з останньою цифрою n. Оскільки $3n$ і $7n$ за припущенням не діляться на 10, нуль у розряді одиниць може утворитися лише з перенесенням у розряд десятків одиниці. Сума цієї одиниці та передостанніх цифр чисел $3n$ і $7n$, як ми з'ясували, повинна бути парною. А тому одна з передостанніх цифр непарна. Таким чином, у кожному випадку хоча б одне з чисел $3n$ і $7n$ містить непарну цифру.

Якщо ж число n закінчується одним або кількома нулями, розглянемо число n', що утворене з n відкиданням усіх таких нулів. Згідно з доведеним вище, одне з чисел $3n'$ та $7n'$ містить непарну цифру. Але тоді або число $3n$, або число $7n$ також містить непарну цифру, бо утворене відповідно з $3n'$ чи з $7n'$ приписуванням тієї самої кількості нулів.

6. *Задача № 7 молодшої ліги.*

7. *Задача № 8 молодшої ліги.*

8. *Задача № 5 старшої ліги, пункт а).*

Старша ліга

1. *Задача № 3 молодшої ліги.*

2. ***Відповідь:*** $f(x)=x$, $x>0$.
Розв'язання. Поділімо обидві частини заданої рівності на *xy*:

$$3f\left(\frac{x}{y}\right)+5f\left(\frac{y}{x}\right)=3\frac{x}{y}+5\frac{y}{x}.$$

Покладемо $x=a$, $y=1$ та помножимо рівність на 3:

$$9f(a)+15f\left(\frac{1}{a}\right)=9a+\frac{15}{a}.$$

Тепер замість цього покладемо $x=1$, $y=a$ та помножимо рівність на 5:

$$15f\left(\frac{1}{a}\right)+25f(a)=\frac{15}{a}+25a.$$

Звідси маємо, що $16f(a)=16a$. Замість a можна підставити довільне додатне число, тому $f(x)=x$, $x>0$. З іншого боку, неважко переконатися, що ця функція справді задовольняє умову задачі.

3. ***Розв'язання.*** Доведімо спершу лему:
Лема. Число *n* можна подати як суму *l* послідовних натуральних чисел тоді й лише тоді, коли число $\frac{2n}{l}$ натуральне, більше за *l* і має парність, протилежну до парності числа *l*.
Доведення. Якщо число *n* можна подати як суму *l* послідовних натуральних чисел, перше з яких дорівнює *a*, то

$$n=a+(a+1)+(a+2)+...+(a+l-2)+(a+l-1)=\frac{l(2a+l-1)}{2}\Rightarrow\frac{2n}{l}=2a+l-1.$$

Число $2a+l-1$, як неважко зрозуміти, більше за *l* і має парність, відмінну від парності числа *l*.
Навпаки, якщо $\frac{2n}{l}$ натуральне, більше за *l* і має парність, протилежну до парності числа *l*, візьмемо як перший доданок натуральне число $a=\frac{1}{2}\left(\frac{2n}{l}-l+1\right)$. Тоді

$$a+(a+1)+...+(a+l-1)=\frac{l(2a+l-1)}{2}=\frac{l\cdot 2n/l}{2}=n.$$

Лему доведено.
Тепер для довільного *k* можемо розглянути число вигляду $n=\frac{k(k+1)(2m+1)}{2}$, де *m* пробігає всі натуральні значення (при цьому *n* завжди натуральне, бо одне з чисел *k* та $k+1$ парне). Число *n* можна подати як суму *k* послідовних натуральних чисел, бо величина $\frac{2n}{k}=(k+1)(2m+1)>k$ є, очевидно, натуральним числом і має ту ж парність, що й число $k+1$, тобто протилежну до парності числа *k*. У той же час число *n* можна подати як суму $k+1$ послідовного натурального числа, бо число $\frac{2n}{k+1}=k(2m+1)\geqslant 3k>k+1$ є натуральним і має парність, протилежну до парності числа $k+1$.

4. *Задача № 7 молодшої ліги.*

5. ***Розв'язання.*** Для розв'язання задачі нам знадобиться така лема:

Лема. Нехай два кола ω_1 і ω_2 з радіусами r_1 і r_2 відповідно дотикаються зовнішнім чином у точці *P*, а точки $A \in \omega_1$ і $B \in \omega_2$ такі, що пряма *AB* — дотична до кола ω_2 (рис. 4). Тоді відношення $\frac{AP}{AB}$ не залежить від розташування точок і дорівнює $\frac{AP}{AB} = \sqrt{\frac{r_1}{r_1 + r_2}}$.

Доведення. Позначмо центри кіл через O_1 та O_2, а кут $\angle AO_1P$ через α. Зрозуміло, що точки O_1, *P* та O_2 колінеарні. Скориставшись тригонометричними співвідношеннями, матимемо:

$$AP^2 = \left(2r_1 \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2r_1^2(1-\cos\alpha);\ AB^2 = AO_2^2 - O_2B^2 = (AO_1^2 + O_1O_2^2 - 2AO_1 \cdot O_1O_2 \cos\alpha) - O_2B^2 =$$

$$= r_1^2 + (r_1 + r_2)^2 - 2r_1(r_1 + r_2)\cos\alpha - r_2^2 = 2r_1^2 + 2r_1r_2 - 2r_1(r_1 + r_2)\cos\alpha = 2r_1(r_1 + r_2)(1-\cos\alpha).$$

Звідси $\frac{AP}{AB} = \sqrt{\frac{2r_1^2(1-\cos\alpha)}{2r_1(r_1+r_2)(1-\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_1 + r_2}}$. Лему доведено.

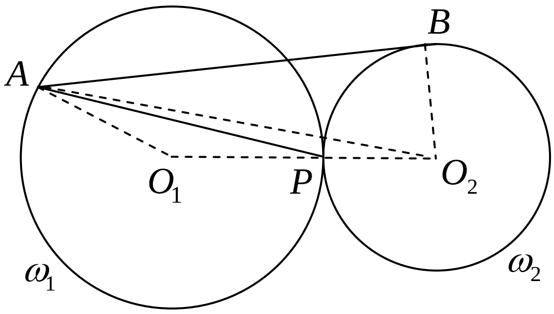

Рис. 4

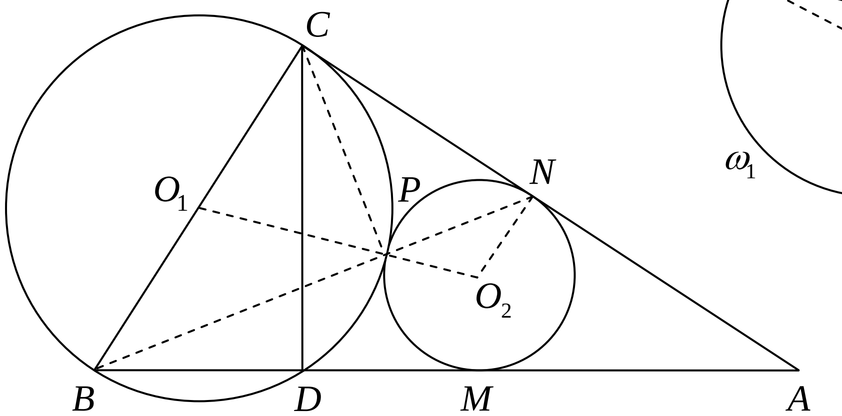

Рис. 5

Позначимо коло, описане навколо трикутника *BCD*, через ω_1, а коло, побудоване всередині трикутника *ACD*, через ω_2. Нехай точка O_1 — центр кола ω_1, O_2 — центр ω_2, а *P* — точка дотику кіл (рис. 5). Кола дотикаються зовнішнім чином: у разі дотикання внутрішнім чином одне з кіл мало би повністю міститися в іншому, але це не так, бо, наприклад, $M \notin \omega_1$, а $D \notin \omega_2$.

Використавши твердження леми, можемо записати, що $\frac{CP}{CN} = \frac{BP}{BM} = \frac{DP}{DM} = k$, де *k* — деяка фіксована величина, що залежить лише від радіусів кіл ω_1 і ω_2. Із теореми Птолемея, застосованої до вписаного чотирикутника *BCPD*, маємо співвідношення $BD \cdot CP + BC \cdot DP = CD \cdot BP$. Якщо тепер підставити $CP = k \cdot CN$, $DP = k \cdot DM$ і $BP = k \cdot BM$, отримаємо твердження пункту а) задачі:

$$BD \cdot k \cdot CN + BC \cdot k \cdot DM = CD \cdot k \cdot BM \ \Leftrightarrow\ BD \cdot CN + BC \cdot DM = CD \cdot BM.$$

Перейдімо до пункту б). Кут *BDC* прямий, тому відрізок *BC* — діаметр кола ω_1, точка O_1 — середина цього відрізка, а $\angle CPB = 90°$. Прямим є також і кут *ACB*, тому *AC* — дотична до ω_1. Тепер запишемо такі рівності:

$$\angle PCN = \frac{1}{2}\angle PO_1C,\ \angle PNC = \frac{1}{2}\angle PO_2N.$$

Крім того, $O_1C \parallel O_2N$, бо обидві ці прямі перпендикулярні до *AC*. Тому $\angle PO_1C + \angle PO_2N = 180°$, а

$$\angle PCN + \angle PNC = \frac{1}{2}(\angle PO_1C + \angle PO_2N) = 90° \ \Rightarrow\ \angle CPN = 90°.$$

Тоді точки *B*, *P* та *N* колінеарні, а *CP* — висота прямокутного трикутника *BCN*. Звідси $\Delta CPN \sim \Delta BPC$, тому $\frac{CP}{CN} = \frac{BP}{BC}$. У той же час, як ми встановили, $\frac{CP}{CN} = \frac{BP}{BM}$, тож $BM = BC$.

6. ***Розв'язання.*** Проведімо такі перетворення:

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}=\frac{1}{2+x^2+y^2+2x}\leqslant\frac{1}{2(1+xy+x)}.$$

Нехай a, b та c — довільні додатні числа, для яких $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{b}$, $z=\frac{a}{c}$ (такі числа існують, оскільки $xyz=1$: наприклад, a можна покласти рівним 1, b покласти рівним x, а c рівним $xy=\frac{1}{z}$). Тоді $\frac{1}{2(1+xy+x)}=\frac{1}{2(1+\frac{c}{a}+\frac{b}{a})}=\frac{a}{2(a+b+c)}$. Записавши аналогічні співвідношення для решти доданків, дістанемо:

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2(1+xy+x)}+\frac{1}{2(1+yz+y)}+\frac{1}{2(1+zx+z)}=$$

$$=\frac{a}{2(a+b+c)}+\frac{b}{2(a+b+c)}+\frac{c}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}.$$

7. ***Відповідь:*** 1005.

Розв'язання. В усіх наведених нижче міркуваннях ми припускатимемо, що $n>1$.

Перепишемо задане рекурентне співвідношення таким чином:

$$(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_n-3(n-1).$$

Поділімо обидві частини цієї рівності на $n(n-1)(n+1)$. Так ми зробимо можливою заміну, яка спрощує співвідношення:

$$\frac{a_{n+1}}{n(n+1)}=\frac{a_n}{(n-1)n}-\frac{3}{n(n+1)}\iff b_{n+1}=b_n-\frac{3}{n(n+1)},\text{ де } b_k=\frac{a_k}{(k-1)k}.$$

Тоді

$$b_n=b_{n-1}-\frac{3}{(n-1)n}=\left(b_{n-2}-\frac{3}{(n-2)(n-1)}\right)-\frac{3}{(n-1)n}=\ldots=$$

$$=\left(\ldots\left(\left(b_2-\frac{3}{2\cdot3}\right)-\frac{3}{3\cdot4}\right)-\ldots-\frac{3}{(n-2)(n-1)}\right)-\frac{3}{(n-1)n}=$$

$$=b_2-3\left(\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}+\frac{1}{(n-1)n}\right)=$$

$$=b_2-3\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=b_2-3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{a_2}{2}-3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{a_2-3}{2}+\frac{3}{n};$$

$$a_n=n(n-1)b_n=n(n-1)\left(\frac{a_2-3}{2}+\frac{3}{n}\right)=(n-1)\left(\frac{(a_2-3)n}{2}+3\right).$$

За умовою число a_2 непарне, тому $a_2=2p+1$ для деякого цілого p і, відповідно, $a_n=(n-1)((p-1)n+3)$. Далі маємо:

$$a_{2011}=2010(2011p-2008)\,\vdots\,2012\Rightarrow 2011p-2008\,\vdots\,1006\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2012p-2012-p+4\,\vdots\,1006\Rightarrow p=1006q+4,\ q\in\mathbb{Z}.$$

Тоді $a_n=(n-1)((1006q+3)n+3)=1006qn(n-1)+3(n+1)(n-1)$. Доданок $1006qn(n-1)$ ділиться на 2012 незалежно від значення n, адже одне з чисел n та $n-1$ парне. А доданок $3(n+1)(n-1)$ ділиться на $2012=4\cdot503$ тоді й лише тоді, коли один із множників $n-1$ та $n+1$ ділиться на просте число 503, причому множники парні. Найменшим відповідним числом $n>1$ є 1005.

Наостанок зауважимо, що якщо послідовність задана як $a_n=1006qn(n-1)+3(n+1)(n-1)$, $n\geqslant1$, де q — довільне фіксоване ціле число, то вона справді задовольняє умову задачі.

8. ***Розв'язання.*** Оскільки AM — медіана, площі трикутників BAM і CAM рівні, а тому (рис. 6) $\frac{1}{2}AB\cdot AM\sin\angle BAM=\frac{1}{2}AC\cdot AM\sin\angle CAM$, звідки $\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle CAM}=\frac{AC}{AB}$. Із прямокутного ΔAB_1E маємо: $AE=\frac{AB_1}{\cos\angle EAB_1}=\frac{AB_1}{\sin\angle CAM}$.

Аналогічно $AF=\frac{AC_1}{\cos\angle FAC_1}=\frac{AC_1}{\sin\angle BAM}$. Тоді $\frac{AE}{AF}=\frac{AB_1\sin\angle BAM}{AC_1\sin\angle CAM}=\frac{AB_1\cdot AC}{AC_1\cdot AB}=1$. Остання рівність випливає з теореми про січні і з того, що точки B, C, B_1 і C_1 лежать на одному колі (на колі з діаметром BC). Отже, $AE=AF$. А оскільки AM та EF перпендикулярні, то й $ME=MF$.

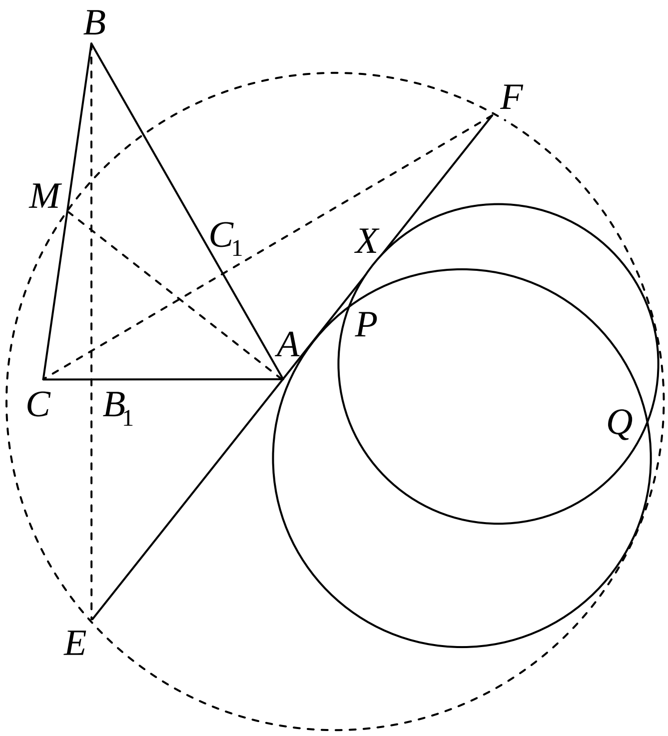

Рис. 6

Розглянемо тепер довільне з двох кіл, що перетинаються в точках P та Q. Позначимо через X точку дотику цього кола до відрізка EF, а через t довжину дотичної, проведеної до кола з точки M, та запишемо узагальнену теорему Птолемея для даного кола й точок F, M, E:

$$t\cdot EF=EX\cdot MF+FX\cdot ME=EX\cdot ME+FX\cdot ME=EF\cdot ME\ .$$

Тоді $t=ME$, тобто довжина дотичної, проведеної з точки M, фіксована й не залежить від конкретного розташування кола. Це означає, що степінь точки M відносно обох розглядуваних кіл однаковий, тобто M лежить на радикальній осі кіл — прямій, що проходить через точки P та Q.