Конструкції

Сердюк Назар, nsaann@gmail.com

1. Всередині рівнобедреного трикутника ABC з кутом при вершині A рівним 110° відмічено таку точку D, що $\angle DAC = \angle DCA = 25^\circ$. Знайдіть $\angle DBC$.

2. Всередині правильного трикутника ABC вибрана точка M така, що $MA^2 = MB^2 + MC^2$. Знайдіть кут $\angle BMC$.

3. Пряма, що проходить через інцентр I трикутника ABC перетинає сторони AB та BC в точках M та N відповідно так, що трикутник BMN гострокутний. На стороні AC відмічені точки K і L так, що $\angle ILA = \angle IMB$ і $\angle IKC = \angle INB$. Доведіть, що $AM + KL + CN = AC$.

4. В гострокутному трикутнику ABC точки A_2, B_2, C_2 – середини висот AA_1, BB_1, CC_1 відповідно. Знайдіть суму кутів $\angle B_2A_1C_2$, $\angle C_2B_1A_2$ та $\angle A_2C_1B_2$.

5. Всередині паралелограма $ABCD$ відмічена точка P така, що $\angle PBA = 2\angle PDA$ і $\angle PCD = 2\angle PAD$. Доведіть, що $PB = PC$.

6. Нехай E – точка на медіані AD трикутника ABC; EH – перпендикуляр, опущений з точки E на сторону BC. З точки M, що лежить на відрізку EH опущенні перпендикуляри MN, MP на сторони AB та AC відповідно. Доведіть, що якщо точки N, E та P лежать на одній прямій, то M лежить на бісектрисі кута $\angle BAC$.

7. Дан опуклий шестикутник $ABCDEF$ в якому протилежні сторони паралельні і відстані між протилежними сторонами рівні. Відомо, що $\angle A = \angle D = 90^\circ$. Доведіть, що діагоналі BE та CF при перетині утворюють кут 45°.

8. В випуклому чотирикутнику $ABCD$ $AB = BC = CD$, діагоналі AC та BD мають різну довжину та перетинаються в точці E. Доведіть що $AE = DE$ тоді та тільки тоді коли $\angle BAD + \angle ADC = 120^\circ$.

9. Дан невипуклий шестикутник $ABCDEF$ в якому немає самоперетинів та жодні дві протилежні сторони не є паралельними. Відомо, що $\angle A = 3\angle D$, $\angle B = 3\angle E$, $\angle C = 3\angle F$; $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$. Доведіть, що діагоналі AD, BE та CF перетинаються в одній точці.

10. Нехай ABC – рівнобедренний трикутник з інцентром I ($AC = BC$). Нехай P – точка на дузі BIC, що лежить всередині $\triangle ABC$. Прямі, що проходять через P паралельно до AC та BC перетинають сторону AB в точках D та E відповідно. Пряма що проходить через P паралельно до AB перетинає сторони AC та BC в точках F та G відповідно. Доведіть, що точка перетину DF та EG лежить на описаному колі трикутника ABC.

11. Нехай $ABCDE$ – опуклий п'ятикутник в якому $BC \parallel AE$, $AB = BC + AE$, $\angle B = \angle D$, M – середина CE, O – центр описаного кола трикутника BCD. Доведіть, що якщо $\angle DMO = 90^\circ$, то $2\angle BDA = \angle CDE$.

12. На висотах AA_1, BB_1, CC_1 (але не на продовдженнях висот) гострокутного трикутника ABC відмітили точки A', B', C' відповідно так, що $A' \neq H, B' \neq H, C' \neq H$ де H – ортоцентр ABC і сума площ трикутників ABC', BCA', CAB' дорівнює площі трикутника ABC. Доведіть, що коло, описане навколо трикутника $A'B'C'$, проходить через H.

13. В гострокутному трикутнику ABC на сторонах AB та BC відмічені точки P та Q відповідно так, що $\frac{AP}{PQ} = \frac{BC}{AC}$; $\frac{CQ}{PQ} = \frac{AB}{AC}$. Доведіть, що коло описане навколо трикутника BPQ проходить через центр кола описаного навколо трикутника ABC.

14. Дана трапеція $ABCD$ така, що $AB \parallel CD$; $BC = AC$; H – середина AB. Пряма l проходить через точку H і перетинає прямі AD та BD в точках P та Q відповідно. Доведіть, що кути $\angle ACP$ та $\angle BCQ$ рівні або складають у сумі розгорнутий кут.

15. Коло, що проходить через вершини B та C трикутника ABC перетинає сторони AB та AC в точках C' та B' відповідно; H, H' – ортоцентри трикутників ABC та $AB'C'$ відповідно. Доведіть, що прямі BB', CC' та HH' перетинаються в одній точці.