# Інваріант та напів-інваріант

Сердюк Назар, nsaann@gmail.com

1. В будівлі є декілька кімнат в кожній з яких є декілька декілька людей. Кожної хвилини, якщо це можливо, деяка людина виходить з кімнати і заходить в іншу кімнату в якій було принаймні стількі ж людей. Доведіть, що наступить момент коли всі люди будуть знаходитися в одній кімнаті.

2. Є купа з $n$ камінців. За один крок дозволяється розділити купу на дві непорожні та додати добуток кількості камінців у двох отриманих купах до загальної суми. Процесс закінчується коли в кожній купі буде рівно 1 камінь. Доведіть, що незалежно від способу розділення кінцеве значення загальної суми не буде змінюватися (спочатку загальна сума була рівною 0).

3. Дано таблицю $m \times n$, заповнену дійсними числами. Дозволяється замінити знак в усіх числах деякого рядка або стовпчика якщо сума чисел у цьому рядку або стовпчику є від'ємною. Доведіть, що за допомогою декількох таких кроків можна отримати таблицю таку, що в кожному її рядку або стовпчику сума чисел є невід'ємною.

4. В таблиці $n \times n$ є $n-1$ зафарбованих клітинок. Кожної хвилини кожна клітинка, що має принаймні дві сусідні зафарбовані клітинки стає зафарбованою. Доведіть, що знайдеться клітинка яка ніколи не буде зафарбованою.

5. По колу розташовано 1994 камінців на яких сидять жаби. За один крок з одного з камінців, на якому сидять щонайменше 2 жаби, одна жаба стрибає на правий сусідній камінь і одна жаба стрибає на лівий сусідній камінь. Спочатку всі жаби сидять на одному камені. Доведіть, що якщо їхня кількість 1994, то завжди знайдеться камінь на якому сидять щонайменше 2 жаби, а якщо їхня кількість менша за 1994 то після скінченної кількості кроків на кожному камені буде сидіти щонабільше 1 жаба.

6. В коробці лежить 2000 білих шарів. Також є нескінченна кількість білих, зелених та червоних шарів, що лежать зовні коробки. За один крок можна замінити 2 шари з коробки на один або два за наступним правилом: два білих або два червоних на зелений, два зелених на білий та червоний, білий та зелений на червоний або зелений і червоний на білий. Після скінченної кількості кроків у коробці залишилося 3 шари. Доведіть, що хоча б один з них зелений. Чи можна після скінченної кількості кроків залишити у коробці лише один шар?

7. На нескінченній клітчатій стрічці розташовано декілька фішок. За один крок з клітинок $n$, $n-1$ прибирається по одній фішці, і замість цього в клітинку $n+1$ кладеться одна фішка, або прибирається дві фішки з клітинки $n$ і замість цього кладеться по одній фішці в клітинки $n-2$ та $n+1$, якщо це можливо. Доведіть, що цей процес обов'язково завершиться і кінцева конфігурація буде незмінною незалежно від порядку виконаних кроків.

8. На столі лежить стопка з $n$ фішок. За один крок дозволяється пересунути верхню фішку з стопки на праву сусідню стопку якщо там було принаймні на 2 фішки менше. Цей процес закінчується коли більше не можливо зробити жодного кроку. Доведіть, що фінальна конфігурація не залежить від способу пересунення фішок і опишіть цю конфігурацію в залежності від $n$.

9. Є $n$ фішок викладених в ряд, одна сторона фішки біла, а інша чорна причому спочатку усі фішки лежать білою стороною догори. За один крок дозволяється забрати одну не крайню фішку білою стороною догори і перевернути дві її сусідні фішки. Доведіть що можна залишити лише дві фішки на столі тоді та тільки тоді, коли $n-1$ не ділиться на 3.

10. Нехай $A_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ − скінченна послідовність дійсних чисел. Для кожного $k \geq 0$ з послідовності $A_k = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будуємо послідовність $A_{k+1}$ наступним чином: вибираємо розбиття множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ на дві підмножини $I$ та $J$ так, щоб вираз $|\sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j|$ приймав своє найменше значення, у послідовності $A_{k+1} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y_i = x_i + 1$, якщо $i \in I$ і $y_i = x_i - 1$, якщо $i \in J$. Доведіть, що для деякого $k$ в послідовності $A_k$ знайдеться такий елемент $x$, що $|x| \geq n/2$.

11. Дана клітчаста дошка $m \times n$ в кожній клітинці якої знаходиться фішка, причому кожна фішка має дві сторони: білу та чорну. Спочатку всі фішки розташовані білою стороною догори окрім однієї кутової фішки, що розташована чорною стороною догори. За один крок дозволяється прибрати одну чорну фішку і перевернути всі її сусідні фішки. Знайдіть усі пари $(m, n)$ для яких можна повністю прибрати усі фішки.

12. Дано таблицю, що містить $n$ фішок так, що в кожному рядку та стовпчику є рівно одна фішка, назвемо цю конфігурацію $A$. Нехай $B$ – інша така конфігурація. Припустимо, що кожен клітчастий прямокутник у якого одна з вершин співпадає з лівою верхньою вершиною таблиці містить не менше фішок з $B$ ніж з $A$. Доведіть, що конфігурацію $B$ можна отримати з $A$ за допомогою декількох наступних кроків: за один крок дозволяється в прямокутнику, що містить рівно дві фішки, одну в правому верхньому куту і одну в лівому нижньому куту, замінити ці дві фішки на дві фішки у відповідно лівому верхньому куту та правому нижньому куту цього прямокутника.

13. В кожній цілочисельній точці $(x, y)$, де $y \leq 0$ розташована фішка. За крок дозволяється перестрибнути деякою фішкою через сусідню на пусте місце і прибрати цю сусідню фішку. Доведіть що за скінченну кількість кроків неможливо отримати цілочисельну точку $(x, y)$, де $y \geq 5$ і в якій разташована фішка.

14. В кожній вершині правильного пятикутника записане ціле число так, щоб сума усіх чисел була додатною. Якщо в трьох послідовних вершинах записані числа $x, y, z$ де $y < 0$, то дозволяється замість чисел $x, y, z$ записати відповідно числа $x + y, -y, z + y$. Визначте чи обов'язково через скінченну кількість кроків усі записані числа будуть невід'ємними.

15. На площині розташовано декілька точок та одиничне коло $C$. За один крок коло $C$ переходить за допомогою паралельного переносу у коло з центром у центрі масс усіх точок, що знаходилися всередині $C$. Доведіть, що за скінченну кількість кроків коло $C$ зупиниться.