Теорія груп

1. Нехай скінченна група G діє на скінченній множині M. Для зручності писатимемо $g(x)$ замість $\pi_g(x)$. Для кожного $x \in M$ позначимо $G_x = \{g \in G | \, g(x) = x\}$,

$O(x) = \{g(x) \in M \ | \ g \in G\}$ - орбіта x під дією G (нагадаємо, що орбіти різних точок не перетинаються, або співпадають).

а) Покажіть, що для довільного $x \in M$ відповідна G_x є підгрупою G.

б) Доведіть, що $|O(x)| = |G|/|G_x|$

в) Для $g \in G$ позначимо $F_g = \{x \in M | \, g(x) = x\}$ - множина нерухомих точок елемента g. Доведіть, що $\sum_{g \in G} |F_g| = \sum_{x \in M} |G_x|$.

г) (Лема Бернсайда) Нехай N – кількість різних орбіт, на які розбивається M під дією G. Доведіть, що $N = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |F_g|$ (тобто кількість орбіт рівна середній кількості нерухомих точок елементів із G).

2. Нехай $p_n(k)$ – кількість перестановок множини $\{1, 2, \dots, n\}$, кожна з яких має рівно k нерухомих точок. Доведіть, що $\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$

3. Скількома різними способами можна пофарбувати вершини правильного 2016-кутника у k кольорів, якщо розфарбування, що суміщаються деякою симетрією цього многокутника вважати однаковими?

4. Скількома різними способами можна пофарбувати вершини грані куба у k кольорів, якщо розфарбування, що суміщаються деякою симетрією куба вважати однаковими?

5. До кубика Рубіка застосували деяку послідовність поворотів. Доведіть, що можна декілька разів повторити цю послідовність поворотів і отримати початкове положення.

6. Комбінація А поворотів кубика Рубіка називається породжуючою, якщо довільний можливий стан кубика Рубіка можна отримати, застосувавши декілька разів А. Чи існує породжуюча комбінація?

7. Група G називається циклічною, якщо існує такий елемент a цієї групи, що $G = \langle a \rangle$

(нагадаємо, що $\langle a \rangle$ – підгрупа утворена усіма елементами вигляду $a^k, k \in \mathbb{Z}$, інакше кажучи –це підгрупа, породжена елементом a, тобто найменша підгрупа, яка містить елемент a). Нехай група G – скінченна циклічна, $|G| = n$. Покажіть, що будь-яка підгрупа циклічної групи є циклічною, та для кожного дільника d числа n існує єдина пігрупа групи G, порядок (кількість елементів у цій підгрупі) якої рівний d. З теореми Лагранжа випливає, що таким чином можна повністю описати всі підгрупи скінченної циклічної групи.

8. На нескінченній клітчастій дошці виділили кут, утворений клітинками, в яких обидві координати центра додатні. Доведіть, що у кожній клітині цього кута можна записати

натуральне число так, щоб у кожному горизонтальному або вертикальному ряді клітинок будь-яке натуральне число зустрічалося ріно один раз.

9. Доведіть, що в будь-якій групі парного порядку існує елемент $a \neq e$ такий, що $a^2 = e$.

10 Якому елементу дорівнює добуток усіх елементів скінченної комутативної групи, порядок якої непарний?

11 а) Наведіть приклади двох скінченних не ізоморфних груп одного порядку.

б) Наведіть приклад групи, яка ізоморфна деякій своїй власній підгрупі (тобто підгрупі, яка не співпадає із усією групою)

Нагадаємо, що групи є ізоморфними, якщо існує бієкція f між цими групами, яка зберігає операції (тобто $f(a) * f(b) = f(ab)$).

Вказівки:

1. б) Покажіть, що $a(x) = b(x) \Leftrightarrow aG_x = bG_x$ (це випливає з того, що $aG_x = bG_x \Leftrightarrow b^{-1}a \in G_x$)

1. в) Порахуйте двома способами кількість пар (g, x) таких, що $g(x) = x$.

1. г) $N = \sum_{x \in M} \frac{1}{|O(x)|}$.

2. Використайте лему Бернсайда або результат задачі 1.в) для множини M=$\{1,2,\dots,n\}$ та групи G усіх перестановок n елементів.

3. Використайте лему Бернсайда для групи G симетрій правильного 2016-кутника та множини M всіх можливих розфарувань (без урахування симетрій) вершин правильного 2016-кутника у k кольорів ($|M| = k^{2016}$).

4. Застосуйте лему Бернсайда для групи G симетрій куба та множини M всіх можливих розфарувань граней куба у k кольорів ($|M| = k^6, |G| = 24$).

6. Не існує. Не всі повороти кубика Рубіка комутують, тоді як довільна циклічна група є комутативною.

8. Перетворимо множину натуральних чисел на групу, наприклад розглянувши бієкцію між натуральними й цілими числами. Позначимо отриману групову операцію $\odot$.Тоді шукане заповнення отримаємо якщо записати у клітині з координатами (n, m) число $n\odot m$.

9. Розбийте елементи на пари вигляду (a, a^{-1}).

11. а) $Z_2 \times Z_2$ (додавання покоординатне) та Z_4.

б) Група – усі цілі числа із операцією додавання. Підгрупа – усі парні числа.